Autores: Bernardita Ried y Pablo Paredes
Año: 2020
Contacto: preuencuarentena@gmail.com

Guía nº4: Razones, Proporciones y Porcentajes

Eje temático: Números

DEMRE

- Concepto y cálculo de porcentaje.
- Problemas que involucren porcentaje en diversos contextos.

1. Razones

Las razones son una comparación entre dos cantidades. De esta manera, se encapsula la idea de que variables se relacionan con el símbolo de la división-fracción y eso es constante.

Se escribe $a : b$ y se lee "a es a b" (donde a es el antecedente y b el consecuente.)

Se utiliza, como dijimos anteriormente, cuando se comparan dos elementos, ya sea, por ejemplo, el peso de dos personas, la altura, respectivos ingresos, etc. Siempre se estudian variables cuantificables. En el caso de números, toda razón se puede expresar como una fracción y eventualmente como un decimal.

Ejemplo: Pablo y Macarena poseen ingresos de 60.000$ y 80.000$ respectivamente. Podemos decir que la razón entre sus ingresos (en ese orden) es 60.000 : 80.000, lo cual se puede ir simplificando, tal cual una división, y llegar a que la razón es 3 : 4, es decir, que por cada 3$ que gana Pablo, Macarena gana 4$.

Otro ejemplo: La escala de un mapa es 1 : 20.000. Si en el mapa, la distancia entre la casa de Berni y de Loreto es 14 cm, ¿cuál es la distancia real entre ellas?

Nos dicen que la escala del mapa viene dada por la razón 1 : 20.000, o sea, que un objeto en el mapa es 20.000 veces más extenso en la realidad. Eso lo podemos interpretar como cada unidad u del mapa, en la realidad mide $20.000u$. Por ende, si en el mapa la distancia corresponde a 14 cm, entonces en la realidad hablamos de $20{,}000 \cdot 14$ cm. Esto es equivalente a 280.000 cm, y como 1 m equivale a 100 cm, entonces 280.000 cm = 2.800 m.

Desafío: Al dividir una cuerda de 54 m de longitud en dos trozos que están en la razón 2 : 7, ¿cuál será la diferencia entre ellos?

1.1. Serie de Razones

Puede que se aparezca una tercera o más relaciones de equivalencia de razones, lo que se conoce como **serie de razones**. Un ejemplo puede ser la relación $a : b : c$.

Ejemplo: Hay 100 bolitas de colores en una caja, estas son azules, rojas o verdes. La razón entre las azules, rojas y verdes es de 2 : 3 : 5, respectivamente. ¿Cuántas bolitas azules hay en la caja?

La razón 2 : 3 : 5 quiere decir que por cada 2 bolitas azules, hay 3 rojas y 5 verdes. Luego, para resolver el problema, decimos que la cantidad de bolitas azules es $2k$, y así, como la proporción se tiene que mantener, la cantidad de bolitas rojas es $3k$ y la cantidad de bolitas verdes es $5k$. Finalmente, hay que usar el hecho que son 100 bolitas, entonces la suma de todas debe dar 100.

$2k + 3k + 5k = 100 \Rightarrow 10k = 100 \Rightarrow k = 10$

Reemplazamos $k = 10$ y nos da que la cantidad de bolitas azules es $2k = 2 \cdot 10 = 20$

2. Proporciones

Cuando dos razones son equivalentes entre sí lo llamamos proporción. Se escribe $a : b = c : d$ y se lee: "a es a b como c es a d". Una forma equivalente de encontrarla es $a \cdot d = b \cdot c$.

Es imporante notar que si $x : a = y : b$, entonces existe una constante k, denominada constante de proporcionalidad, tal que:

$$x = k \cdot a, \quad y = k \cdot b; \quad k \in \mathbb{R}$$

¿Cómo demostramos eso? $x : a = k = y : b$, lo que es equivalente a:

$$x : a = y : b = k \quad \Leftrightarrow \quad x : a = k; \;\; y : b = k \quad \Leftrightarrow \quad x = a \cdot k; \;\; y = b \cdot k$$

2.1. Proporcionalidad Directa

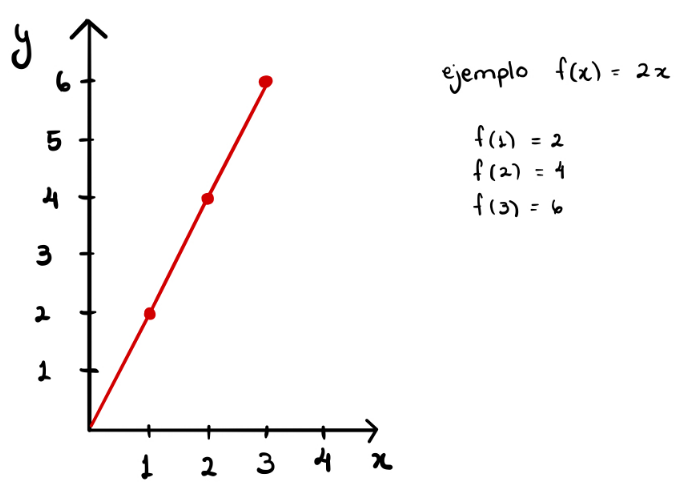
Dos variables son directamente proporcionales si el cuociente entre sus valores correspondientes es constante. Es decir, sean dos variables x e y. Se dice que las variables x e y están en proporción directa si y solo si:

$$\frac{x}{y} = k \Leftrightarrow x = k \cdot y$$

Siendo k una constante.

Veamos un ejemplo: Sea la la relación de proporcionalidad directa: $y : x = 2$ lo que implica que: $y = 2 \cdot x$. Por ende, la variable y tomará el doble de los valores de x, lo que se ilustra en la tabla a continuación:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12



Notemos que en una proporción directa, si una cantidad aumenta, la otra variable lo hará de manera que la proporción se mantenga constante. Lo mismo al disminuir.

2.2. Proporcionalidad Inversa

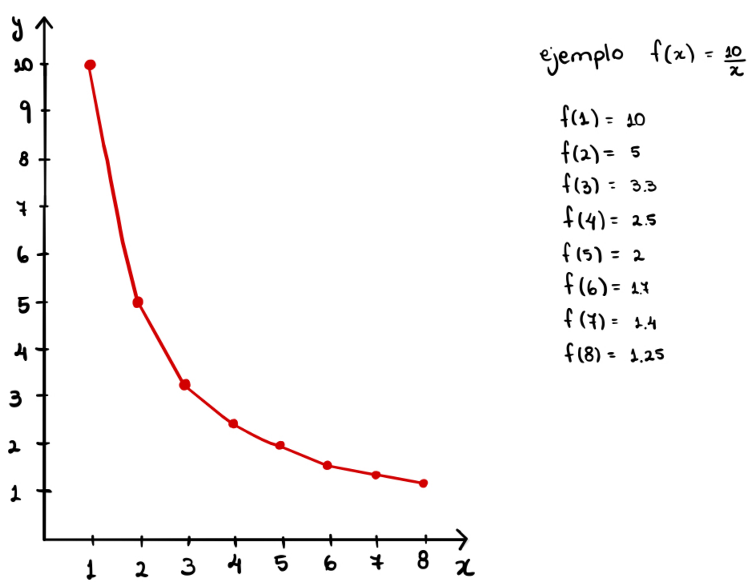
Dos variables son inversamente proporcionales si la multiplicación entre sus valores correspondientes es constante. Es decir, sean dos variables x e y. Se dice que las variables x e y están en proporción inversa si y solo si:

$$x \cdot y = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{y}$$

Siendo k una constante.

Veamos un ejemplo: Sea la la relación de proporcionalidad directa: $x \cdot y = 10$ lo que implica que: $y = \frac{10}{x}$.

y	10	5	$3.\overline{3}$	2.5	2	1.7	1.4	1.25
x	1	2	3	4	5	6	7	8



Notemos que en una proporción inversa, si una cantidad aumenta, la otra variable disminuirá de manera que la proporción se mantenga constante.

Veamos un ejemplo clásico que nos dejará una idea clara:

La ley de los Gases Ideales en el área de la termodinámica, postula que:

$$\frac{P \cdot V}{T} = k$$

En donde P es presión, V es Volúmen, T es Temperatura y k es la constante de proporcionalidad. Aquí se aprecia las variables: P y T (a volumen constante), junto con V y T (a presión constante) son proporcionalmente directas, mientras que P y V (a temperatura constante) son inversamente proporcionales.

3. Porcentajes

Uno de los casos importantes de la proporcionalidad es el de los porcentajes, donde consideramos al consecuente de la razón como 100:

$$\frac{porcentaje}{100} = \frac{x}{numero} \tag{1}$$

Ejemplo: El 40 % de 450:

$$\frac{40}{100} = \frac{x}{450} \Leftrightarrow x = \frac{450 \cdot 40}{100} = 180 \tag{2}$$

De esta manera, se aprecia que si se quiere calcular el $P\,\%$ de un total A, basta aplicar:

$$\frac{P}{100} \cdot A$$

3.1. Porcentajes Notables e Importantes

Se deben manejar todos estos valores:

Tanto por Ciento	Fracción	Decimal
1 %	$\frac{1}{100}$	0.01
5 %	$\frac{1}{20}$	0.05
10 %	$\frac{1}{10}$	0.1
12,5 %	$\frac{1}{8}$	0.125
20 %	$\frac{1}{5}$	0.2
25 %	$\frac{1}{4}$	0.25
$33.\overline{3}\,\%$	$\frac{1}{3}$	0.33...
50 %	$\frac{1}{2}$	0.5
$66.\overline{6}\,\%$	$\frac{2}{3}$	0.66...
75 %	$\frac{3}{4}$	0.75
100 %	$\frac{1}{1}$	1
150 %	$\frac{3}{2}$	1.5

3.2. Composición de Porcentajes

Un caso típico de problemas involucrando porcentajes, es cuando se tienen porcentajes de porcentajes, e incluso una cadena más larga de estos. Aquí, para calcular, aplicamos lo anterior las veces que sea necesario.

Por ejemplo, para calcular el 20 % del 40 % de 120, se calcula primero el 40 % de 120 y después el 20 % del **resultado del cálculo anterior**, es decir

(1) $\dfrac{40}{100} \cdot 120 = 48$

(2) $\dfrac{20}{100} \cdot 48 = 9,6$

y así 9,6 es el resultado que se quiere obtener.

Ahora, se puede ver que el proceso pudo haber sido escrito en una línea:

$$\frac{20}{100} \cdot \left(\frac{40}{100} \cdot 120\right) = 9,6$$

y como la multiplicación es asociativa, los paréntesis se pueden retirar, ya que da lo mismo el orden en el que se multiplican los factores:

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 120 = 9,6$$

Luego, como la multiplicación es conmutativa, podemos cambiar de orden los porcentajes:

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot 120 = 9,6$$

y así, se puede concluir que el 40 % del 20 % es lo mismo que el 20 % del 40 %.

Ejemplo: El 20 % de un número a es igual al 10 % de 50. ¿Cuánto vale el 25 % de la diferencia entre a y su 10 %?

Digamos que queremos calcular R. Lo primero que nos dicen es:

$$\frac{20}{100} \cdot a = \frac{10}{100} \cdot 50 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot a = 5 \Rightarrow a = 25$$

Luego, para llegar al resultado R, se requiere el siguiente cálculo:

$$R = \frac{25}{100} \cdot \left(a - \frac{10}{100} \cdot a\right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4}\left(\frac{10a - a}{10}\right) = \frac{9a}{40}$$

Finalmente, reemplazamos $a = 25$ y llegamos a: $R = \dfrac{9 \cdot 25}{40} = \dfrac{45}{8}$

Figura 1: Rosalind Franklin

4. Científica Destacada: Rosalind Franklin

Rosalind Franklin nació Notting Hill, Londres, el 25 de julio del año 1920, en el seno de una familia judía. Fue una importante biofísica y cristalógrafa inglesa creadora de imprescindibles contribuciones al entendimiento de la estructura del ADN, el carbón, los virus y el grafito.

Fue graduada de la Universidad de Cambridge en el año 1941. Llevó a cabo análisis fundamentales de microestructuras del carbón y del grafito y esto fue clave para su doctorado en química física, que consiguió en el año 1945 en la Universidad de Cambridge.

Tras Cambridge, estuvo tres años (1947-1950) en París, en el Laboratoire de Services Chimiques de L'Etat, donde realizó estudios sobre la aplicación de técnicas de difracción de rayos X a sustancias amorfas.

Llegado el año 1951, volvió a Inglaterra para trabajar como investigadora vinculada en el laboratorio de John Randall en el King's College de Londres. Rosalind se relacionó con Maurice Wilkins, quien reveló sin su permiso sus fotos de difracción de rayos X del ADN a James Watson y Francis Crick, quienes en el año 1953 las publicaron en la revista Nature. Watson, Crick y Wilkins compartieron el Premio Nobel de Fisiología y Medicina en 1962. Watson puntualizó que Franklin debió haber sido galardonada también con el Premio Nobel de Química, junto con Wilkins.

Rosalind Franklin murió a muy corta edad, de cáncer de ovario, en 1958 en la ciudad de Londres. Lo más seguro es que esta enfermedad se le haya presentado por las reiteradas exposiciones a la radiación que tuvo mientras realizaba sus investigaciones. Continuando su investigación, su compañero de equipo y posteriormente beneficiario Aaron Klug ganó el Premio Nobel de Química en 1982. Tampoco la galardonaron.