www.preuencuarentena.com
10 de Septiembre de 2020 (Versión 1.0)
Preuniversitario en Cuarentena

Definición de Funciones

Eje temático: Álgebra y Funciones

Plano Cartesiano

Motivación

En nuestra vida cotidiana usamos, quizás sin notarlo, la noción de ejes perpendiculares. Un claro ejemplo es la brújula, donde se marcan, claramente, **dos direcciones**: la **vertical** y la **horizontal**. En la vertical encontramos el Norte y el Sur y en la horizontal el Oeste y el Este.

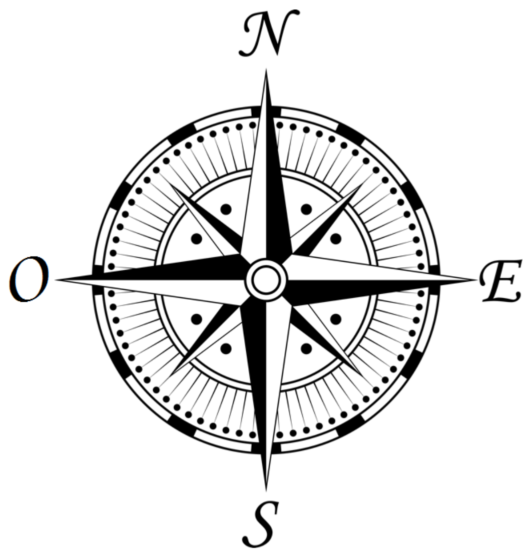
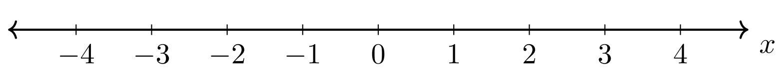


Figura 1: Brújula como esencia de ejes perpendiculares.

Nosotros podríamos tener una brújula en la mano y avanzar en cualquier dirección, por ejemplo a una dirección entre el Norte y el Este, mejor conocido como Noreste. Pero este instrumento solo ilustra dirección y no distancias. Por ejemplo, si vivo en Santiago de Chile, sabré que el mar está al Oeste, como también la puesta de sol. Pero a simple vista no podemos decir si la costa está más cerca de Santiago que el sol. El plano cartesiano nos permite poder saber ambas cosas, lo que se reduce a determinar la posición relativa de un punto con respecto a un origen, lo que **incluye la dirección y la distancia**.

Definición

En las clases de números vimos lo importante que era la recta numérica para ordenar números, donde se pueden tener números negativos, positivos y el cero si nos limitamos a los números reales:



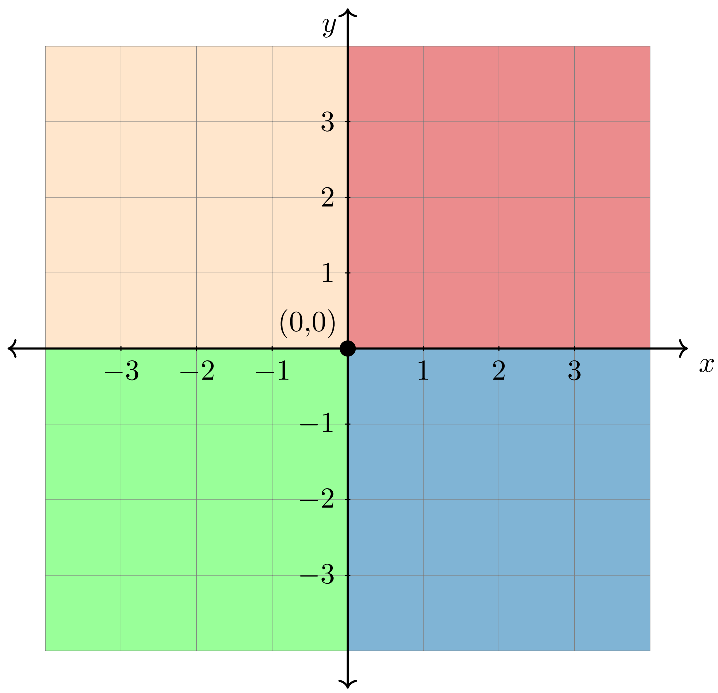
El plano Cartesiano es la **unión de dos rectas numéricas perpendiculares**, una horizontal y otra vertical, que se cortan en un punto llamado **origen**.

Es fundamental manejar el concepto del plano cartesiano en matemáticas, ya que ayudan a poder visualizar muchos problemas. Esto facilita notablemente los cálculos y el entendimiento.

Cómo graficar en el Plano Cartesiano

Para graficar puntos en el plano cartesiano se usan **dos coordenadas**: La primera indica la posición relativa horizontal y la segunda, la posición relativa vertical. Utilizaremos la notación (x, y) para referirse al un punto del plano donde x corresponde a la posición horizontal , mientras que y corresponde a la vertical.

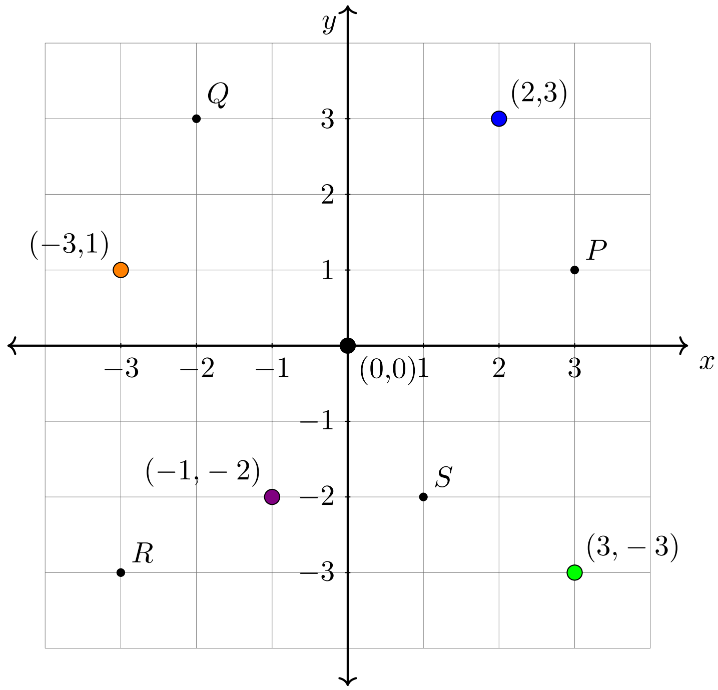
Notemos que el punto del origen posee coordenadas (0,0). Además, en el plano cartesiano tenemos **4 cuadrantes** (I, II, III y IV),



Las características de los puntos (x, y) pertenecientes al plano cartesiano son:

Lugar Geométrico	**Valor de x**	**Valor de y**
I Cuadrante	$x > 0$	$y > 0$
II Cuadrante	$x < 0$	$y > 0$
III Cuadrante	$x < 0$	$y < 0$
IV Cuadrante	$x > 0$	$y < 0$
Eje x (abscisa)	$x \in \mathbb{R}$	$y = 0$
Eje y (ordenada)	$x = 0$	$y \in \mathbb{R}$

En el siguiente plano cartesiano se presentan 8 puntos en los distintos cuadrantes:



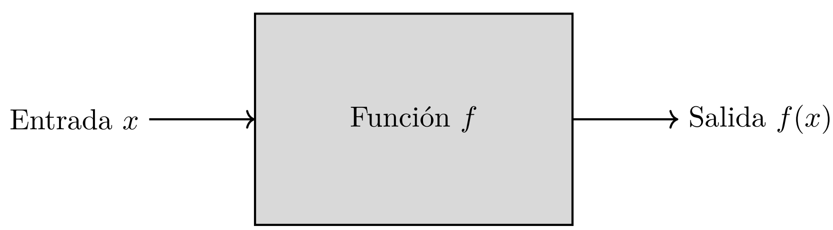
¿Cuáles son las coordenadas y a qué cuadrante pertenecen los puntos P, Q, R y S?

Funciones

Imaginemos una **máquina que recibe números y devuelve un color** para cada número ingresado. Por ejemplo, le entrego el número 4 y me devuelve el color azul. Lo lógico es que para cada número esté predeterminado un color, el cual perfectamente se puede repetir (puede ser una máquina a la que se le introduce cualquier número y siempre dará rosado).

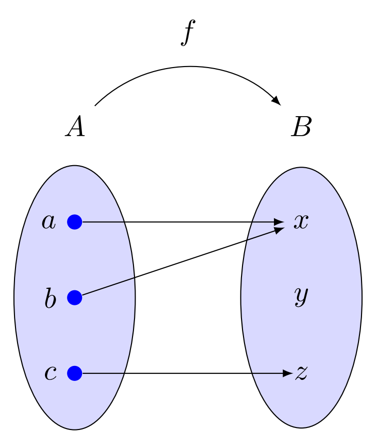
Ahora bien, estas máquinas cumplen dos reglas que no se pueden romper:

- **Al ingresar un número tiene que salir algún color**. No puede haber un número al cual no se le asignó un color.
- **A cada número se le tiene que asignar solo un color**. No puede suceder que al ingresar el número 4 nos devuelva el color azul y rojo a la vez.



Otra analogía: pensemos en personas y sus cumpleaños. Todos tenemos un cumpleaños porque corresponde al día del año que nacimos. Por otro lado, una persona no puede tener 2 o más días de cumpleaños en un año. Pero no hay restricción que impida que dos personas o más tengan su cumpleaños el mismo día.

A continuación, vamos a presentar una manera muy simple y clásica de representar una función:

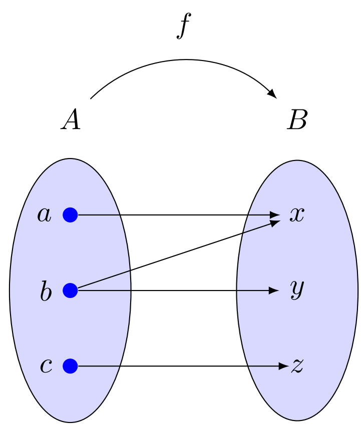


Esto quiere decir que tengo dos conjuntos A y B, donde **a cada elemento del conjunto A le asigno un valor del conjunto B**. Notamos que esto sí representa una función, ya que todo elemento de A tiene un elemento asignado de B (**de cada elemento en A sale una flechita hacia**

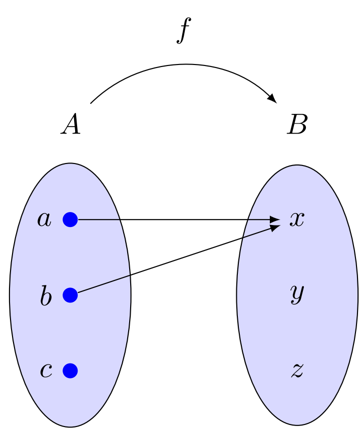
algún elemento en B) y, además, este elemento asignado de B es único (**de cada elemento en** A **sale solo una flechita hacia** B).

Para denotar que al elemento a se le asignó el elemento x, vamos a escribir $f(a) = x$, lo que quiere decir que al aplicarle la función f al elemento a, esta devuelve x. Entonces, apreciamos que en el ejemplo, $f(a) = x, f(b) = x, f(c) = z$

Veamos ejemplos de asignaciones que resultan no ser funciones:



Aquí la asignación no es una función, pues **a un elemento de** A (b), **se le asignaron dos elementos del conjunto** B, es decir, $f(b) = x, f(b) = y$, cosa que no puede suceder.



Esta asignación tampoco es función, porque **faltó realizar una asignación a un elemento de** A (c), es decir, $f(c)$ no existe, cosa que tampoco puede suceder.

Definición General

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una relación donde, a cada elemento x del conjunto A, se le asigna un sólo elemento del conjunto B. Se expresa como:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

y se lee "f es una función de A en B".

Toda esa expresión puede asustar, pero en realidad sintetiza la misma idea de la máquina a la que uno le introduce un valor x y retorna algún valor y.

Por ejemplo, tomemos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(n) = n + 3 \end{aligned}$$

La primera línea nos dice que la función **toma elementos en $\mathbb{N}$ y retorna elementos en** $\mathbb{N}$. La segunda línea nos dice que cuando **se ingrese a la función un número** n (que debe ser natural en este caso), **nos retornará** $n + 3$. Por ejemplo:

- $f(2) = 2 + 3 = 5$
- $f(13) = 13 + 3 = 16$
- $f(-3)$ **no existe**, pues -3 no pertenece a $\mathbb{N}$, que es donde está definida la función. **¡¡¡Por eso es muy importante revisar dónde está definida la función!!!**

Gráfico de una Función

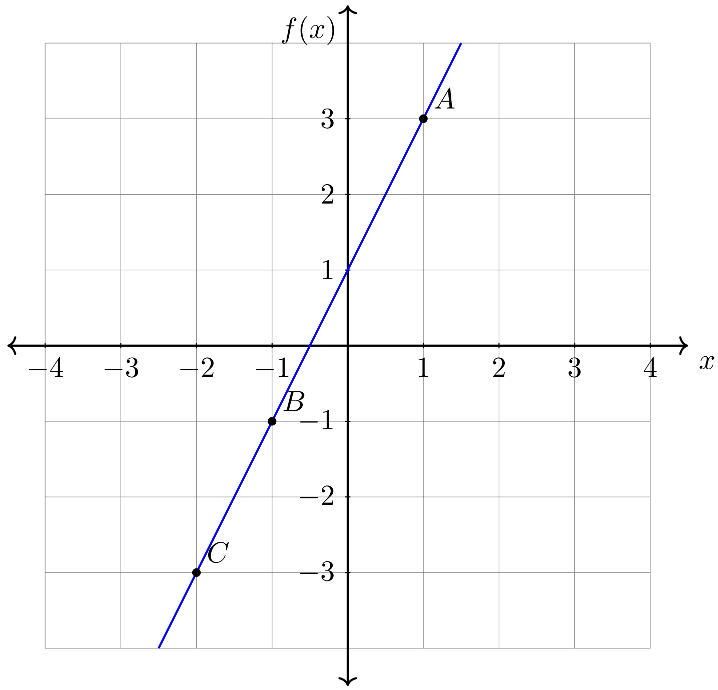
Como se dijo previamente, el plano cartesiano tiene la utilidad de poder ver gráficamente cómo se comporta una función.

Cuando tenemos una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, los puntos que van a pertenecer al gráfico de la función **son los puntos de la forma** $(x, f(x))$ con $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, tomemos la siguiente función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

Entonces, los puntos que vamos a marcar para graficar la función en el plano cartesiano son los de la forma $(x, f(x)) = (x, 2x+1)$. Por ejemplo, los puntos $A = (1, 3)$, $B = (-1, -1)$ y $C = (-2, -3)$ van a ser parte del gráfico de la función.

Luego, el gráfico de f se verá de la siguiente manera:



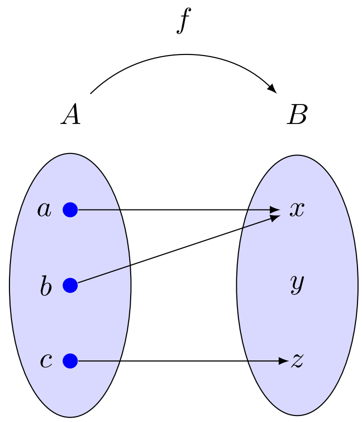
Se puede observar que los puntos mencionados previamente forman parte del gráfico de la función (línea azul).

Notamos entonces, que **los valores que uno le entrega a la función están en el eje** X y **los que retorna la función están en el eje** Y. Además, lo que se introduce en la función es un número que pertenece a un conjunto, mientras que lo que esta retorna está determinado por lo que uno entrega como valor en principio. Por esto, cuando se anota una función como $f(x) = y$, se dice que x es la **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente**.

Decimos que y es la **imagen** de x si se cumple que $f(x) = y$. Por otro lado, decimos que x es la **preimagen** de y si $f(x) = y$.

Por ejemplo, si consideramos la función anterior $f(x) = 2x + 1$, tendremos que la imagen de 3 es 7, pues $f(3) = 7$. Asimismo, tendremos que 3 es preimagen de 7 para la función $f(x) = 2x + 1$.

Elementos Significativos en las Funciones



Volvamos a la representación visual de una función. Recordemos que se tiene un conjunto A, el cual contiene los elementos que se le van a entregar a la función y, por otra parte, se tiene el conjunto B, el cual contiene a los elementos que retorna la función luego de entregarle un elemento de A.

Confirmamos que como a cada elemento de A se le asocia un único elemento de B, entonces el diagrama sí corresponde a una función. **El hecho de que haya un elemento en B que no se asocie a ningún elemento de A no contradice la definición**. Esto pues no se exige que cada elemento de B sea asociado a un elemento de A.

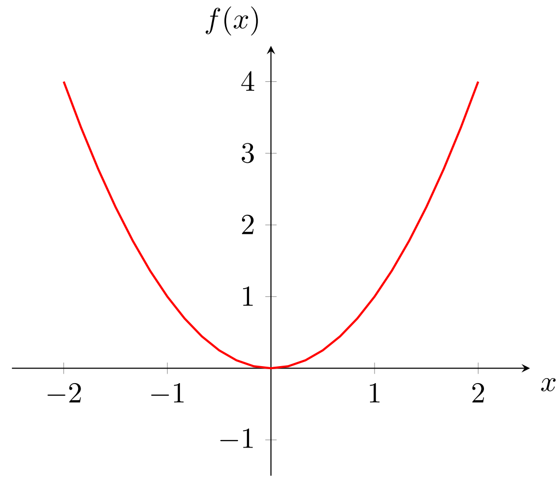
A continuación, definiremos los elementos más relevantes de una función:

- **Dominio** ($Dom(f)$): Es el **conjunto de salida de la función**, el cual incluye a todos los valores que puede tomar la variable independiente. En la figura, el dominio sería el conjunto A.
- **Co-Dominio** ($CoDom(f)$): Es el **conjunto de llegada de la función**, que incluye todos los valores a los que puede llegar la función. En la figura, el codominio sería el conjunto B.
- **Recorrido** ($Rec(f)$): Es el conjunto que incluye **todos los valores que la variable dependiente puede tomar**. En la figura, el Recorrido sería el conjunto $\{x, z\}$.

Es muy importante notar que, por la definición de función, **todo elemento del dominio tiene una única imagen**. Por otro lado, los **elementos del codominio pueden tener muchas preimagenes o incluso no tener ninguna**. Finalmente, los **elementos del recorrido deben tener al menos una preimagen**.

Por ejemplo, si tomamos la función

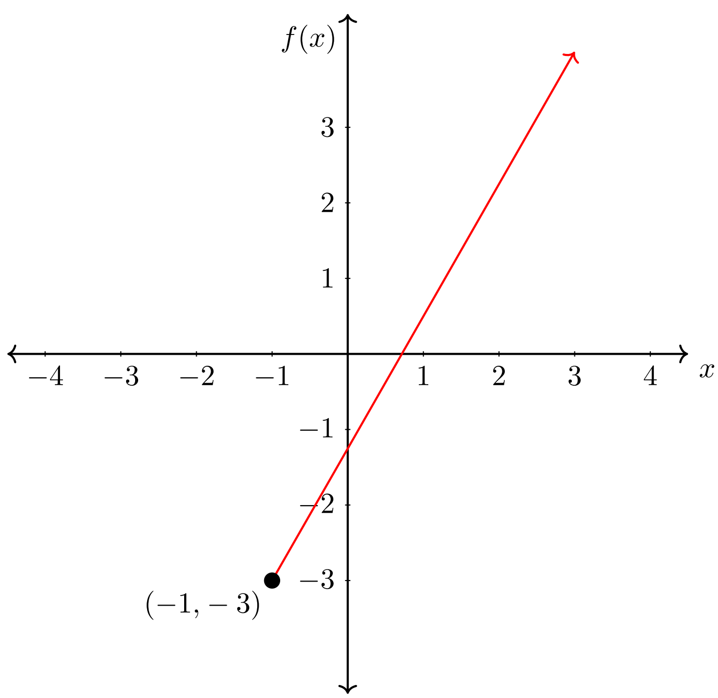
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$



Tenemos que el dominio es $\mathbb{R}$, el codominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido son los números reales positivos y el cero (formalmente $\mathbb{R}_0^+$). Como se dijo anteriormente, los elemento del codominio pueden tener más de una preimagen. Por ejemplo, el número 4 posee dos preimagenes: 2 y -2, ya que $f(-2) = (-2)^2 = 4$ y $f(2) = 2^2 = 4$. Por otra parte, el número -1 no tiene preimagen, ya que no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 = -1$, pues todos los números reales al cuadrado son mayores o iguales a 0.

Nótese que, necesariamente, el **Recorrido es un conjunto incluido en el Co-Dominio**. Esto, matemáticamente, significa que el Recorrido es un **subconjunto** del Co-Dominio y se anota: $Rec(f) \subseteq CoDom(f)$

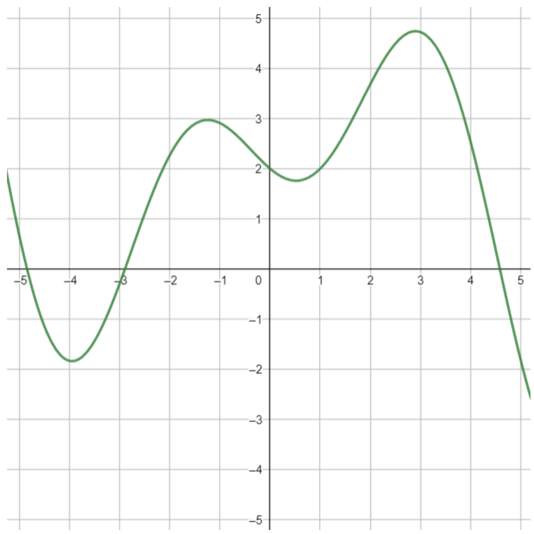
Desafío:
¿Cuál podría ser el Dominio, Co-Dominio y Recorrido de la siguiente función?

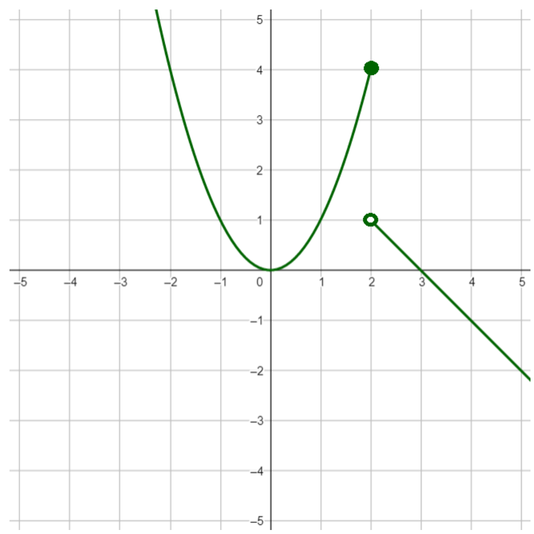


Tipos de Funciones

La clasificación de las funciones es relevante ya que nos entrega información sobre el comportamiento de esta y de su gráfica. Existen distintas formas de clasificar una función.

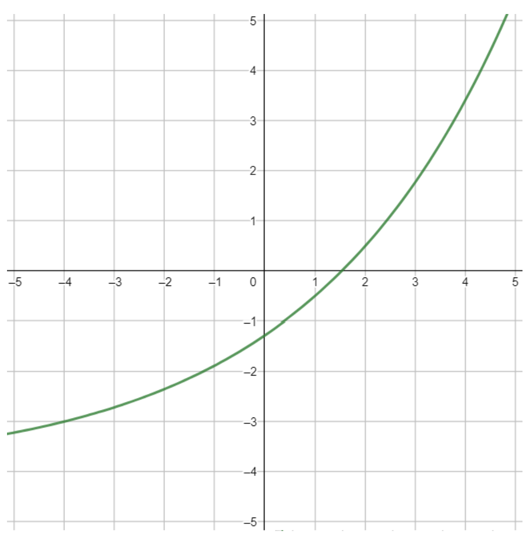
Función Contínua y Discontínua: Una función continua es aquella que, geométricamente, **no presenta cortes en su gráfica** (se puede dibujar sin soltar el lápiz). Si la función no es continua, se llama función discontinua.

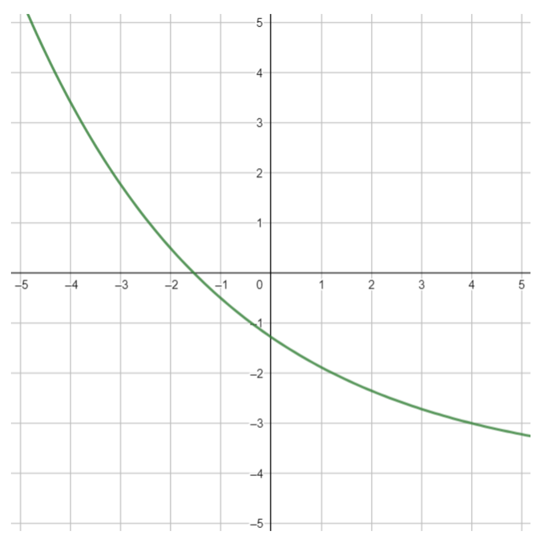




Función Creciente: Es aquella que al aumentar el valor de la variable independiente, también **aumenta el de la variable dependiente**.

Función Decreciente: Es aquella que al aumentar el valor de la variable independiente, **el valor de la variable dependiente disminuye**.





Función Constante: Es aquella que para cualquier valor de la variable independiente, **el valor de la variable dependiente es el mismo**.

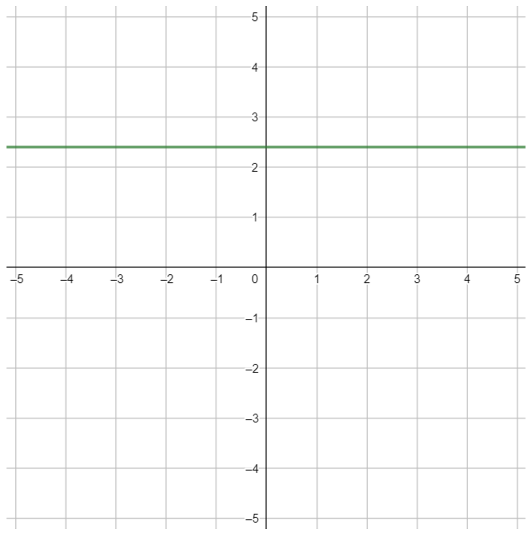


Figura 2: Valentina Tereshkova

Científica Destacada: Valentina Tereshkova

Valentina Tereshkova (6 de marzo de 1937)1 es una cosmonauta y política rusa ya retirada. Ingeniera, se convirtió en la primera astronauta y a la vez la primera civil, que voló al espacio, habiendo sido seleccionada entre más de cuatrocientos aspirantes y cinco finalistas para pilotar el Vostok 6, lanzado el 16 de junio de 1963. Completó 48 órbitas alrededor de la Tierra en sus tres días en el espacio extraterrestre.

Antes de su reclutamiento como cosmonauta, Tereshkova fue una obrera que trabajaba en una fábrica textil, y paracaidista aficionada. Para unirse al Cuerpo de Cosmonautas, Tereshkova fue incorporada de manera honoraria a la Fuerza Área Soviética, siendo así la primera civil en volar al espacio.Después de la disolución del primer grupo de cosmonautas femeninos en 1969, fue un prominente miembro del Partido Comunista de la Unión Soviética, participando en varias oficinas políticas. Permaneció activa en la política tras el colapso de la Unión Soviética (URSS) y es considerada como una heroína en la Rusia post-soviética.