Álgebra y Funciones VI

P1

$$x(x-1) = 0$$

Como tenemos que el producto de 2 factores da 0, entonces, uno de los dos tiene que ser 0. Luego,

$x = 0$ o $x - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ o $x = 1$

D

P2

$$n^2 - 2n + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 = 0$$

Luego, el único número al cuadrado que da 0 es 0. Entonces

$n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

A

P3)

$$x^2 = 42 - x$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$$

Entonces, para factorizar necesitamos dos números que sumados den 1 (el que acompaña al x) y multiplicados de −42 (término constante)

Estos números son −6 y 7, entonces

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+7) = 0$$

$\Rightarrow$ por argumento de la P1

$$x - 6 = 0 \quad o \quad x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = 6 \quad o \quad x = -7$$

D

24)

$$2t^2 + 2t + 1 = t^2 + t + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad t^2 + t + 1 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad t^2 + t + \frac{4-3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \quad t^2 + t + \frac{1}{4} = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática con los parámetros

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad c = \frac{1}{4}$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \cancel{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{4}}}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}$$

D

P5

$$x^2 + 50 = 20x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 51 = 0$$

Notamos que se puede factorizar:

$$\Rightarrow (x-17)(x-3) = 0$$

Entonces,

$$x - 17 = 0 \quad o \quad x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 17 \quad o \quad x = 3$$

A

P6)

$$x^4 + 8x^2 + 16 = 0$$

Cuando las variables son x^4 y x^2, se usa una variable auxiliar

$u = x^2$ y así queda

$$\Rightarrow u^2 + 8u + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (u+4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow u + 4 = 0$$ (Argumento de P2)

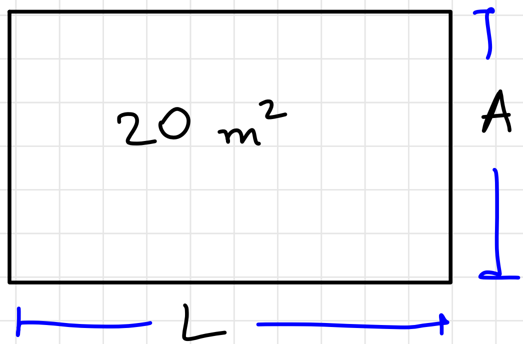
$$\Rightarrow u = -4$$

Volvemos a la variable original:

$$\Rightarrow x^2 = -4$$

A

P7



L es el largo y A el ancho.

El enunciado dice que

$L = A + 1$ (i)

y además, el área de un rectángulo es el largo x ancho. Entonces

$L \cdot A = 20$

$\Rightarrow (A+1)A = 20$ / Reemplazando (i)

$\Rightarrow A^2 + A = 20$

$\Rightarrow A^2 + A - 20 = 0$

Podemos factorizar la expresión:

$$(A+5)(A-4)=0$$

Entonces,

$$A+5=0 \quad o \quad A-4=0$$

$$\Rightarrow \quad A=-5 \quad o \quad A=4$$

Como el ancho tiene que ser positivo, se tiene que $A=4$. Entonces se tienen que hay que comprar

$$L+L+A+A$$

$$=(A+1)+(A+1)+A+A$$

$$=4A+2=16+2=18 \text{ metros}$$

D

P8)

x es el pedazo más largo del hilo y cumple

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$$

Pasamos multiplicando y queda

$$1 \cdot (1-x) = x \cdot x$$

$$\Rightarrow 1 - x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Aplicamos la fórmula con

$a = 1$, $b = 1$, $c = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es el largo de un hilo, no puede ser negativo, entonces la única solución es

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

A

P9

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-3) = 0$$

Entonces, por el argumento de la P1

$$m - 2 = 0 \quad \text{o} \quad m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = 2 \quad \text{o} \quad m = 3$$

A

P10

$$x^2 = x + 132$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 132 = 0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x+11) = 0$$

Entonces, por argumento de la P1

$$x - 12 = 0 \quad \text{o} \quad x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x = 12 \quad \text{o} \quad x = -11$$

B

P11)

$$x^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = -1$$

Como ningún número real al cuadrado es negativo, la ecuación no tiene solución en los reales

E

P12)

$$x - 11\sqrt{x} + 30 = 0$$

Si llamamos $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$

Luego, reemplazando se obtiene

$$u^2 - 11u + 30 = 0$$
$$\Rightarrow (u-6)(u-5) = 0$$

Entonces, por argumento de la P1

$$u - 6 = 0 \quad \text{o} \quad u - 5 = 0$$
$$\Rightarrow \quad u = 6 \quad \text{o} \quad u = 5$$

Entonces, volviendo a la variable original:

$\sqrt{x} = 6$ o $\sqrt{x} = 5$ E

P13

$$p^2 + 4p - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (p+7)(p-3) = 0$$

Entonces, por argumento de la P1

$p+7=0$ o $p-3=0$

$\Rightarrow p=-7$ o $p=3$ E

P14)

$$7x^2 - 13x - 1 = 0$$

Aplicamos fórmula con

$a = 7$, $b = -13$, $c = -1$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-1)}}{2 \cdot 7}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 28}}{14}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{197}}{14}$$

E

P15

$$15x - x^2 - 56 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 15x - 56 = 0$$

Usamos fórmula con

$a = -1$, $b = 15$, $c = -56$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-56)}}{2\cdot(-1)}$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 224}}{-2}$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$= \frac{-15 \pm 1}{-2}$$

Entonces, las soluciones son

$$\frac{-15-1}{-2} = \frac{-16}{-2} = \boxed{8} \text{ y } \frac{-15+1}{-2} = \frac{-14}{-2} = \boxed{7}$$

Entonces

I) ✗ II) ✗ III) ✓

C

P16)

Nos dan las soluciones

$x_1 = 13 \quad , \quad x_2 = -5$

y por propiedad de la ec. cuadrática sabemos que

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Si $a = 1$, entonces

$x_1 + x_2 = -b \Rightarrow 13 - 5 = -b$

$\Rightarrow b = -8$

$x_1 \cdot x_2 = c \Rightarrow 13 \cdot (-5) = c$

$\Rightarrow -65 = c$

Entonces

$a = 1 \ , \ b = -8 \ , \ c = -65$, por lo tanto

La ecuación es

$$x^2 - 8x - 65 = 0$$

C

P17)

La ecuación está escrita en su manera general, entonces el producto de sus soluciones es $\frac{c}{a}$

D

¿Por qué se tiene esa propiedad?

Sabemos que

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a} \cdot \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{\cancel{b^2} \cancel{-b^2} + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a} \quad //$$

P18)

$$dx^2 + fx + g = 0$$

En este caso

$a = d$, $b = f$, $c = g$

Sabemos que la suma de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $\frac{-b}{a}$

Entonces, haciendo el reemplazo obtenemos $\frac{-f}{d}$

B

P19

$$ax^2 - bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a < 0$$

Solo (1): $b > 0$

Tomamos el ejemplo con

$a = -1$, $b = 1$, $c = -2$

que cumple con $a < 0$ y $b > 0$

y queda

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

por lo tanto, las soluciones son

-2 y 1, los cuales tienen distinto signo.

Falta info.

Solo (2): $c < 0$

sabemos que la multiplicación de las soluciones es

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Como $c < 0$ y $a < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

entonces

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

Como x_1 y x_2 son números reale (ya que en el enunciado dicen que la ecuación tiene solución real)

Entonces, la única manera que $x_1 \cdot x_2 > 0$ es que x_1 tenga el mismo signo que x_2 //

B

P20)

Sabemos que el producto de las soluciones de $ax^2+bx+c=0$ es $\frac{c}{a}$

En este caso,

$$a=3, \quad b=-13, \quad c=-10$$

Entonces, el resultado es $\frac{-10}{3}$ A

P21)

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \quad \Big/ \cdot x$$

$$\Rightarrow x^2-1=\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x-1=0$$

Usamos la fórmula con

$$a=1, \quad b=-\frac{3}{2}, \quad c=-1$$

$$x = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+16}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3 \pm 5}{2}}{2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Entonces, las soluciones son

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

C

P22)

La ecuación

$$x^2 - 5kx + 28 = 0$$

tiene como solución $x = 7$, entonces

$$7^2 - 5k \cdot 7 + 28 = 0$$

$$\Rightarrow 49 - 35k + 28 = 0$$

$$\Rightarrow 77 = 35k$$

$$\Rightarrow k = \frac{77}{35} = \frac{11}{5}$$

C

P23)

$$7x^2 - 25x + 12 = 0$$

soluciones a y b.

Nos piden calcular

$$\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}$$

$$= \frac{a(b-1) + b(a-1)}{(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{ab - a + ba - b}{ab - a - b + 1}$$

Como a, b son soluciones de la ecuación, entonces

$$a + b = \frac{-(-25)}{7} = \frac{25}{7}$$

$$a \cdot b = \frac{12}{7}$$

Entonces, haciendo el reemplazo en la expresión:

$$\frac{ab + ba - (a+b)}{ab - (a+b) + 1}$$

$$= \frac{2ab - (a+b)}{ab - (a+b) + 1}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{12}{7} - \frac{25}{7}}{\frac{12}{7} - \frac{25}{7} + 1}$$

$$= \frac{\frac{24 - 25}{7}}{\frac{12 - 25 + 7}{7}} = \frac{\frac{-1}{7}}{\frac{-6}{7}} = \frac{-1 \cdot \cancel{7}}{-6 \cdot \cancel{7}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

P24)

$$\frac{5}{4}x^2 - 3 - x(x-2) + 8 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 10\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - 3 - x^2 + 2x + 8 = \frac{x^2}{4} + 2x + 5$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{5}{4} - 1\right) + 2x + 5 = \frac{x^2}{4} + 2x + 5$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{x^2}{4}} + \cancel{2x} + \cancel{5} = \cancel{\frac{x^2}{4}} + \cancel{2x} + \cancel{5}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0$$

Entonces, la ecuación tiene infinitas soluciones

E

P25

$$3c - 2 > 0 \quad / +2$$

$$\Rightarrow \quad 3c > 2 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c > \frac{2}{3}$$

E

P26

$$50 - 3x \leq -1 \quad / +3x$$

$$\Rightarrow \quad 50 \leq -1 + 3x \quad / +1$$

$$\Rightarrow \quad 51 \leq 3x \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 17 \leq x$$

Vemos que no está en las alternativas

PERO

$$17 \leq x \quad / \cdot (-1)$$

$$-17 \geq -x$$

cambia el sentido al multiplicar por negativo

C

P27

Cuando se tienen dos desigualdades en una, se desarrollan por separado:

$$2 < \frac{2m-10}{9} \quad / \cdot 9$$

$$\Rightarrow \quad 18 < 2m - 10 \quad / +10$$

$$\Rightarrow \quad 28 < 2m \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 14 < m$$

y por otro lado

$$\frac{2m-10}{9} < 4 \quad / \cdot 9$$

$$\Rightarrow \quad 2m - 10 < 36 \quad / +10$$

$$\Rightarrow \quad 2m < 46 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad m < 23$$

Luego, $14 < m < 23$ D

P28)

$$-\frac{1}{2} < \frac{-x-1}{4} \leq 0$$

Se tratan las desigualdades por separado:

$$-\frac{1}{2} < \frac{-x-1}{4} \quad / \cdot 4$$

$$\Rightarrow \quad -2 < -x-1 \quad / +1$$

$$\Rightarrow \quad -1 < -x \quad / \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 > x$$

↳ cambia el signo cuando se multiplica por negativo

Por otro lado

$$\frac{-x-1}{4} \leq 0 \quad / \cdot 4$$

$$\Rightarrow \quad -x-1 \leq 0 \quad / +x$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq x$$

Entonces,

$$-1 \leq x < 1$$ B

P29

3 números pares consecutivos se pueden expresar como $2n-2$, $\underbrace{2n}_{\text{término central}}$, $2n+2$

y la suma de ellos es

$$2n-\cancel{2}+2n+2n+\cancel{2} = 6n$$

Solo (1):

$$6n < 76$$

Tomamos como ejemplo

0, 2, 4 y 4, 6, 8

los cuales cumplen con la condición, por lo que falta información.

Solo (2): $6n > 60$

se toma como ejemplo

60, 62, 64 y 64, 66, 68

los cuales cumplen con la condición, entonces falta información

Ambas juntas:

$6n > 60$ y $6n < 76$

$\Rightarrow n > 10$ y $n < \frac{76}{6} = 12{,}\overline{6}$

Entonces n puede ser 11 o 12

Luego, el término central $(2n)$ puede ser $2 \cdot 11 = 22$ o $2 \cdot 12 = 24$

por lo que falta información

E

P30

$$\frac{7x-2}{-5} \leq 0 \quad / \cdot (-5)$$

↪ se cambia el sentido de la desigualdad.

$$\Rightarrow \quad 7x - 2 \geq 0 \quad / +2$$

$$\Rightarrow \quad 7x \geq 2 \quad / \cdot \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad x \geq \frac{2}{7}$$

A

P31

Para resolver esta pregunta, conviene dejar cada número como una raíz

$$A = 3\sqrt{4} = \sqrt{3^2 \cdot 4} = \sqrt{36}$$

$$B = 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}$$

$$C = \sqrt{35}$$

$$D = 7 = \sqrt{49}$$

Entonces $C < A < B < D$

B

P32)

Hacemos lo mismo que en la P31

$A = \sqrt{21}$

$B = -2\sqrt{6} = -\sqrt{2^2 \cdot 6} = -\sqrt{24}$

$C = 5 = \sqrt{25}$

$D = -3\sqrt{3} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -\sqrt{27}$

Entonces, el orden es

$C > A > B > D$

B

P33)

$$3x - 5 \leq 21 - 10x \quad / +10x$$

$$13x - 5 \leq 21 \quad / +5$$

$$13x \leq 26 \quad / \cdot \frac{1}{13}$$

$$x \leq 2$$

Entonces, el conjunto solución es el intervalo

$]-\infty, 2]$

Entonces, todos los conjuntos que estén dentro de $]-\infty, 2]$ cumplen la desigualdad.

I) $]2, \infty[$ ✗

II) $\{2\}$ ✓

III) $]-\infty, 2]$ ✓

D

P34

Cumplen el sistema los x que cumplen ambas desigualdades:

$$5x + 2 < x \quad / -x$$

$$4x + 2 < 0 \quad / -2$$

$$4x < -2 \quad / \cdot \frac{1}{4}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

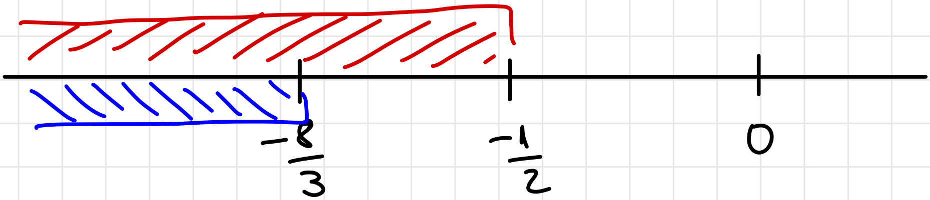
$$4 - 3x \geq 12 \quad / -4$$

$$-3x \geq 8 \quad / \cdot -\frac{1}{3}$$

cambia el sentido de la desigualdad

$$x \leq -\frac{8}{3}$$

Entonces, cumplen el sistema



los x que tengan los dos colores, es decir

$$]-\infty, -\frac{8}{3}]$$

A

P35

$$\frac{2}{x+3} \leq 1$$

Queremos pasar el $x+3$ multiplicando, pero no sabemos el signo de $x+3$, entonces no sabemos si cambia el sentido de la desigualdad, por lo que nos ponemos en casos

Caso 1: $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$$\frac{2}{x+3} \leq 1 \quad / \cdot (x+3)$$

no cambia el sentido pues $x+3 > 0$

$\Rightarrow 2 \leq x+3$

$\Rightarrow 2-3 \leq x$

$\Rightarrow -1 \leq x$

Entonces, se tiene que cumplir que

$x > -3$ y $x \geq -1$

Esto los cumplen los x tal que

$x \geq -1$ pues $-1 > -3$

Caso 2: $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$

$\frac{2}{x+3} \leq 1 \quad / \cdot (x+3)$

cambia el sentido pues $x+3$ es negativo

$\Rightarrow 2 \geq x+3$

$\Rightarrow 2-3 \geq x$

$\Rightarrow -1 \geq x$

Luego, los x tienen que cumplir

$x \leq -1$ y $x < -3$

Lo cual se cumple si $x < -3$

Entonces, la primera desigualdad se cumple si

$x < -3$ o $x \geq -1$

La segunda desigualdad

$$3x + 2 \le 4 - 2x \quad / +2x$$

$$5x + 2 \le 4 \quad / -2$$

$$5x \le 2 \quad / \cdot \frac{1}{5}$$

$$x \le \frac{2}{5}$$

Entonces, los x que cumplen ambas desigualdades son:

$$x < -3 \quad \text{y} \quad x \le \frac{2}{5}$$

o

$$x \ge -1 \quad \text{y} \quad x \le \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x < -3 \quad \text{o} \quad -1 \le x \le \frac{2}{5}$$

P36

$$|2x-1| \leq 3-x$$

Nos ponemos en el caso que $2x-1$ es positivo y otro que es negativo.

Caso 1: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1$
$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Entonces,

$$|2x-1| = 2x-1$$

porque $2x-1$ es positivo. Luego,

$$|2x-1| \leq 3-x$$

$$\Rightarrow 2x-1 \leq 3-x \quad / +x$$

$$\Rightarrow 3x-1 \leq 3 \quad / +1$$

$$\Rightarrow 3x \leq 4 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

Entonces, la solución en el caso 1 es

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Caso 2: $2x - 1 \leq 0 \Rightarrow 2x < 1$

$\Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Entonces,

$|2x-1| = -(2x-1)$

Luego,

$$|2x-1| \leq 3-x$$

$$\Rightarrow -(2x-1) \leq 3-x$$

$$\Rightarrow -2x+1 \leq 3-x \quad / +2x$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3+x \quad / -3$$

$$\Rightarrow -2 \leq x$$

Luego, cumplen los x tal que

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Entonces, el conjunto solución es

$$\left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] = \left[-2, \frac{4}{3}\right]$$

C

P37)

Procedemos igual que en la P36

Caso 1: $7-2x \geq 0 \Rightarrow 7 \geq 2x$

$\Rightarrow \frac{7}{2} \geq x$

$|7-2x| \geq x-3$

$\Rightarrow 7-2x \geq x-3 \quad / +2x$

$\Rightarrow 7 \geq 3x-3 \quad / +3$

$\Rightarrow 10 \geq 3x \quad / \cdot \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{10}{3} \geq x$

Como $\frac{10}{3} < \frac{7}{2}$, se tiene que los x que cumplen ambas condiciones son los que cumplen

$$x \leq \frac{10}{3}$$

Caso 2: $7-2x \leq 0 \Rightarrow 7 \leq 2x$

$\Rightarrow \frac{7}{2} \leq x$

Entonces,

$|7-2x| \geq x-3$

$\Rightarrow -(7-2x) \geq x-3$

$\Rightarrow -7+2x \geq x-3 \quad / -x$

$\Rightarrow -7+x \geq -3 \quad / +7$

$\Rightarrow x \geq 4$

Como $4 > \frac{7}{2}$, los x que cumplen ambas condiciones son los x tal que

$x \geq 4$

Entonces, el conjunto solución es

$$\left]-\infty, \frac{10}{3}\right] \cup [4, \infty[$$

E