Perímetro y Área de Polígonos

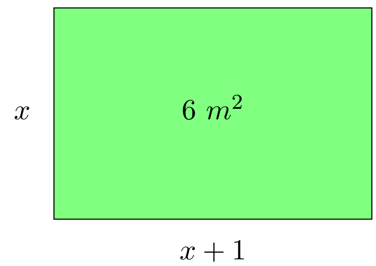
Eje temático: Geometría

Cálculo de Perímetros y Áreas

Motivación y Definición

Si revisas la guía de ecuaciones de segundo grado encontrarás este problema:

Loreto quiere hacer un huerto rectangular en su patio. Sabe que el área que destinará de su patio para este será de 6 metros cuadrados. Si el largo mide 1 metro más que el ancho, ¿cuánto debe medir la reja que construirá para cercarlo?



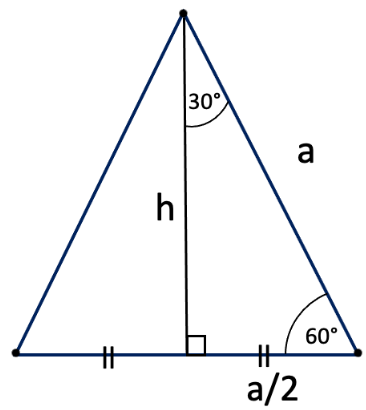
En la antigua resolución nos enfocamos en practicar el planteamiento de ecuaciones. En esta guía nos enfocaremos en lo que es el perímetro y el área de figuras planas. Al final volveremos a retomar el problema.

El **perímetro** es la **suma de la medida los lados** de una figura, mientras que el **área** corresponde a su **superficie**. En el problema de Loreto el perímetro corresponde al largo de la reja que cerca su huerto, mientras que el área al terreno que ocupará para él. A continuación, se encuentra una lista de cómo calcular perímetros y áreas de polígono que nos ayudarán para resolver este tipo de situaciones.

Triángulos

Para calcular el **área de un triángulo**, se toma **cualquiera de sus lados** (a este se le llamará base), se **multiplica por su altura** respectiva y se **divide en dos** el resultado.

En el caso del **triángulo equilátero** de lado a, recordamos que las **alturas llegan al punto medio** de los lados, por lo tanto, se forma un triángulo rectángulo con catetos $a/2$ y h, e hipotenusa a, con h la altura. ¿Te parece conocido? ¡Es el triángulo que genera el trío pitagórico que tanto hemos hablado, de ángulos 30ª, 60º y 90º! Entonces, por el teorema de Pitágoras, se obtiene:



$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 &= a^2\\ \frac{a^2}{4} + h^2 &= a^2\\ h^2 &= \frac{4a^2 - a^2}{4}\\ h^2 &= \frac{3a^2}{4}\\ h &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a\end{aligned}$$

donde la última línea se obtiene debido a que h **es una distancia**, por lo tanto, debe ser positiva.

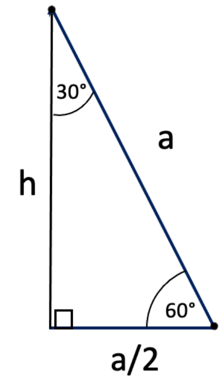
Luego, el área del triángulo la calculamos como base por altura dividido en dos:

$$\textit{Área Triángulo Equilátero} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

En el caso de un **triángulo rectángulo**, notamos que si tomamos un cateto para calcular el área, **la altura respectiva será el otro cateto**, puesto que cae de manera perpendicular. Entonces, si un triángulo rectángulo tiene catetos c_1, c_2, se tiene

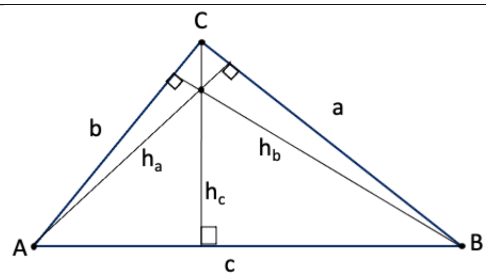
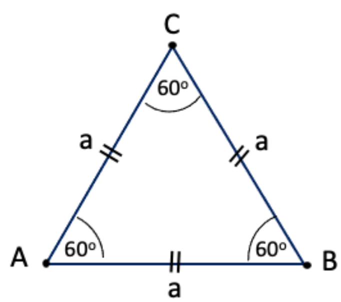
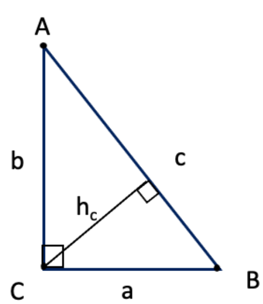
$$\textit{Área Triángulo Rectángulo} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

Calculemos el área del triángulo rectángulo que compone al equilátero:



se debe imponer que $c_1 = \dfrac{a}{2}$ y $c_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Por ende, el área será: $\dfrac{a/2 \cdot a\sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$, que equivale a la mitad de lo calculado anteriormente para el triángulo equilátero.

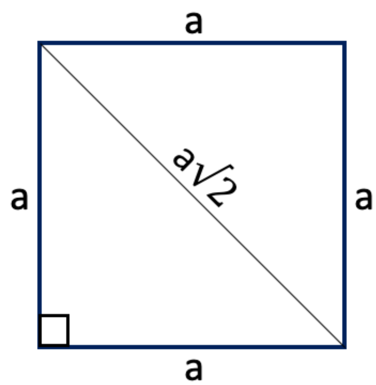
A continuación, les dejamos una tabla con las áreas y perímetros de los triángulos.

Nombre	**Figura**	**Perímetro**	**Área**
Triángulo		$a+b+c$	$\dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$
Triángulo Equilátero		$3a$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Triángulo Rectángulo		$a+b+c$	$\dfrac{ab}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$

Cuadriláteros

Es importante notar que **todos los polígonos están formados por triángulos**, entonces, ya sabiendo calcular el área de triángulos, podemos **calcular el área de cualquier polígono, sumando las áreas de los triángulos que lo forman**.

Por ejemplo, en el caso de un **cuadrado de lado** a, al trazar una de sus diagonales, se **forman dos triángulos rectángulos isósceles de catetos de medida** a, por lo tanto el área del cuadrado será la suma de las áreas de los dos triángulos formados:



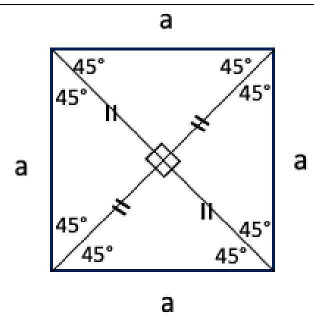
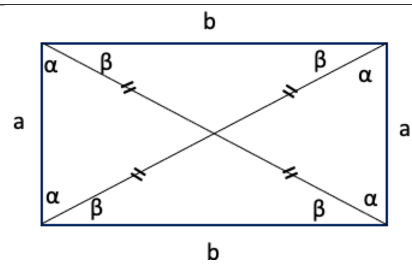
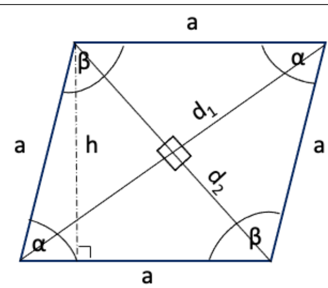
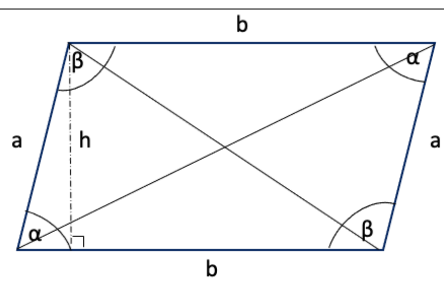
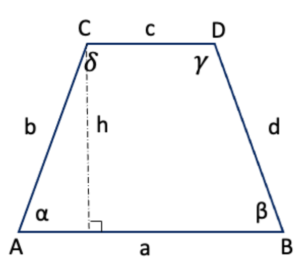
$$\textit{Área Cuadrado} = 2 \cdot \textit{Área Triángulo Rectángulos Isósceles de catetosa}$$

donde $\textit{Área Triángulo Rectángulos Isósceles de catetos } a = \frac{a^2}{2}$. Entonces

$$\textit{Área Cuadrado} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$$

Los invitamos a calcular el área del resto de los cuadriláteros de la misma manera, es un buen ejercicio.

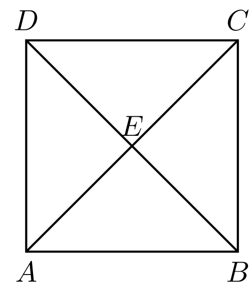
A continuación, les dejamos una tabla con todas las áreas y perímetros de los cuadriláteros.

Nombre	**Figura**	**Perímetro**	**Área**
Cuadrado		$4a$	a^2
Rectángulo		$2a+2b$	ab
Rombo		$4a$	$h \cdot a$ o $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Romboide		$2a+2b$	$h \cdot b$
Trapecio		$a+b+c+d$	$\dfrac{(a+c)}{2} \cdot h$

Ejemplo 1:

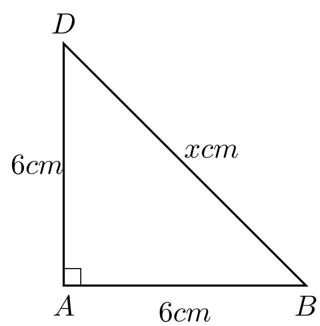
Si $ABCD$ es un cuadrado de lado 6 cm., ¿cuál es el perímetro del $\triangle AEB$?

a) 9 cm
b) 18 cm
c) $(3+6\sqrt{2})$ cm
d) $(6+3\sqrt{2})$ cm
e) $(6+6\sqrt{2})$ cm



Solución:

Para resolver este problema primero debemos calcular el valor de la diagonal del cuadrado. Para ello, calcularemos la medida del lado $\overline{DB}$ al aplicar el teorema de pitagoras en el $\triangle ADB$.



Sabemos que cada lado del cuadrado mide $6cm$, luego, la medida del lado $\overline{DB}$ por teorema de pitagoras será:

$$\begin{aligned} x^2 &= 6^2 + 6^2 \\ x &= \sqrt{6^2+6^2} \\ x &= \sqrt{2\cdot 6^2} \\ x &= 6\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dado que el punto E corresponde a la intersección de las diagonales y estas se dimidian (se dividen por la mitad), tendremos que:

$$\overline{DE} = \overline{EB} = \overline{AE} = \overline{EC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{DB}}{2} = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{2} = 3\cdot\sqrt{2}$$

Finalmente, el perimetro del $\triangle AEB$ viene dado por:

$$
\begin{aligned}
Perimetro &= \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{AB} \\
Perimetro &= 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} + 6 \\
Perimetro &= 6 + 6 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la alternativa correcta es la e)

Ejemplo 2:

Si el área de un cuadrado es 144 cm^2, ¿cuánto mide su perímetro?
a) 12 cm
b) 36 cm
c) 48 cm
d) 81 cm
e) 288 cm

Solución

Recordemos que el área de un cuadrado viene dado por a^2, donde a corresponde a la medida de uno de sus lados. Planteando la ecuación, tendremos que su lado viene dado por:

$$
\begin{aligned}
Area = a^2 &= 144 \\
a^2 &= 144 \\
a &= \sqrt{144} \\
a &= 12[cm]
\end{aligned}
$$

Luego, el perimetro del cuadrado será:

$$
\begin{aligned}
Perimetro &= a + a + a + a \\
Perimetro &= 12 + 12 + 12 + 12 \\
Perimetro &= 48[cm]
\end{aligned}
$$

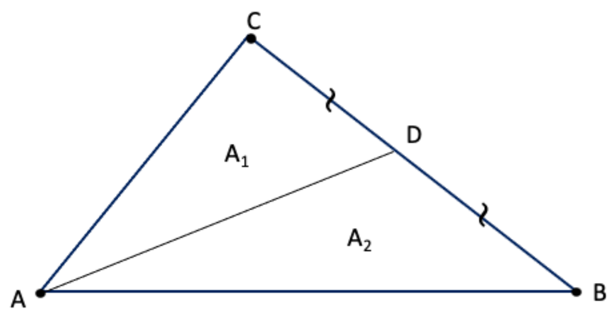
Por lo tanto, la alternativa correcta es la c)

Casos Notables de Áreas

Decimos que dos triángulos son **equivalentes** si es que tienen la **misma área**. En esta sección, veremos que hay elementos que al trazarlos forman triángulos equivalentes:

- Cada **transversal de gravedad** forma **dos triangulos equivalentes**.

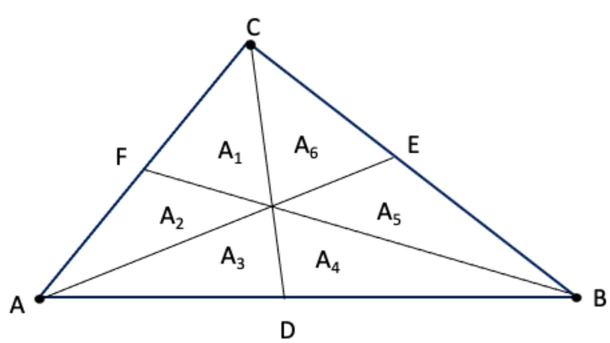
D es el punto medio de $\overline{BC}$



$$A_1 = A_2$$

- Al trazar las **tres transversales**, se forman **seis triangulos equivalentes**.

D, E, F son puntos medios



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$$

- Todos los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes.

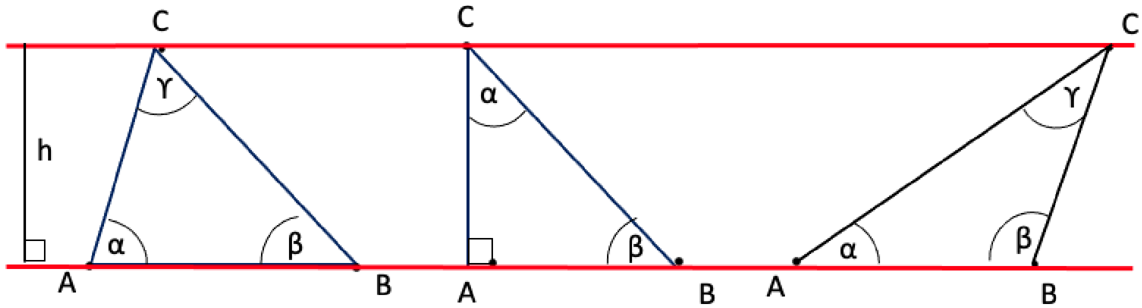
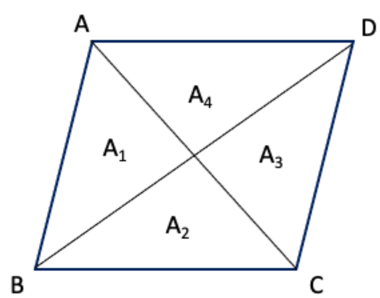


Figura 1: Vemos que las áreas son equivalentes: $Área = \dfrac{\overline{AB} \cdot h}{2}$

En todo **paralelógramo**:

- Al trazar las **diagonales** se forman **cuatro triángulos equivalentes**.



$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

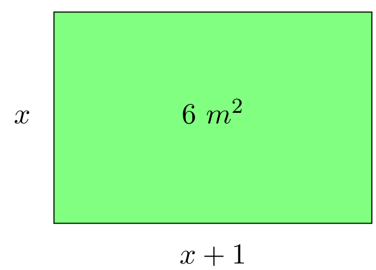
Resolución Problema de Motivación

Loreto quiere hacer un huerto rectangular en su patio. Sabe que el área que destinará de su patio para este será de 6 metros cuadrados. Si el largo mide 1 metro más que el ancho, ¿cuánto debe medir la reja que constuirá para cercarlo?

Para plantear la ecuación que describe el problema, le asignamos al valor en metros del ancho la variable x. Luego, sabemos que $área = ancho \cdot largo$ para el caso de un rectángulo, por lo que la ecuación que describe dicho problema es:

$$x(x+1) = 6 \Longleftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

En la siguiente figura se ilustra el huerto rectangular de Loreto, donde x corresponde al ancho y $(x+1)$ corresponde al largo.



Esta es una ecuación de segundo grado, al resolverla obtenemos el valor de la incógnita (en nuestro caso el ancho) y el perímetro se obtendría sumando el largo de los lados:

$$\text{Perímetro} = x + (x+1) + x + (x+1) = 4x + 2$$

Por ende, si calculamos x se obtiene el resultado. Para eso utilizamos lo que aprendimos de solución de ecuación cuadrática:

$$a = 1$$
$$b = 1$$
$$c = -6$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Por ende, las soluciones pueden valer $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ o $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. Como x es una unidad de medida espacial, debe corresponder a un valor positivo. Por ende $x = 2$. Finalmente el perímetro se calcula introduciendo el valor en la fórmula:

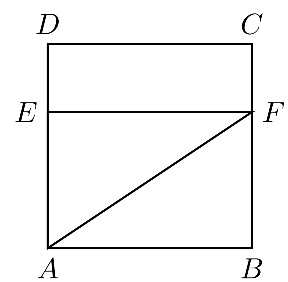
$$\text{Perímetro} = 4x + 2 = 4 \cdot 2 + 2 = 10$$

Por ende el perímetro equivale a 10 metros.

Ejercicios Propuestos:

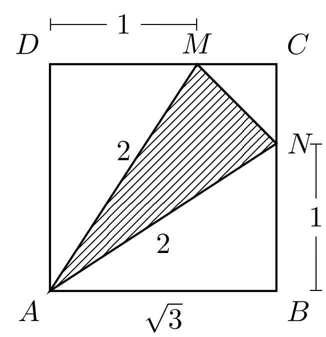
- El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene un área de 144 cm^2 y el rectángulo $EFCD$ una de 36 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del $\triangle AFE$?

  a) 108 cm.
  b) 36 cm.
  c) 30 cm.
  d) 27 cm.
  e) 18 cm.



- En la figura $ABCD$ es un cuadrado. ¿Cuál es el área de $\triangle ANM$?

  a) 1
  b) 2
  c) $\dfrac{9}{8}$
  d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
  e) $\sqrt{3} - 1$



- El cuadrado $ABCD$ de la figura se ha dividido en cinco rectángulos congruentes entre sí, y cada rectángulo tiene un perímetro de 30 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?

  a) 48 cm
  b) 50 cm
  c) 60 cm
  d) 150 cm
  e) Ninguna de los valores anteriores

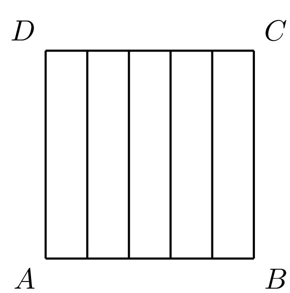


Figura 2: Aracely Quispe Neyra

Científica Destacada: Aracely Quispe Neyra

Aracely Quispe Neira es una destacada peruana, que cuenta con 5 grados académicos enfocados en Ciencias e Ingeniería Astronáutica, ha logrado convertirse en la primera mujer latina en comandar tres exitosas misiones de la NASA: Misión de medición a las lluvias tropicales (TRMM), El Orbitador de Reconocimiento Lunar (LRO), y actualmente el Telescopio Espacial James Webb (JWST) a lanzarse próximamente al espacio en el 2021. Nació en Marripón, al norte de Chiclayo. Estudio la primaria en una escuela rural. No había fluido eléctrico, no solo se alumbraba con lámparas, sino también con el resplandor de la luna y las estrellas, que a la vez iluminaban sus sueños, ahí descubrió en los libros los cohetes espaciales y soñó con verlos algún día de cerca.

Aracely Quispe fue parte de la sonda de exploración lunar de la NASA y hoy es ingeniera senior de operaciones de sistemas de vuelos. Es fruto de sus estudios en EE.UU., desde 2005, de Ingeniería Tecnológica Espacial, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Astronáutica y Ciencias.

Ella también ha conducido una Investigación significativa sobre la desglaciación de los nevados andinos del Perú mediante imágenes satelitales de alta resolución. Aracely trabaja también en proyectos personales enfocados en inspirar, motivar y empoderar a los niños y jóvenes.

Agradecemos este aporte de: Yefferzon Huayta