Inecuaciones

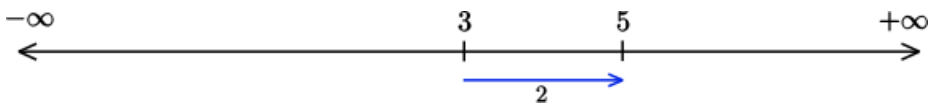
Eje temático: Álgebra y Funciones

Desigualdades

Definición

Sabemos que los números reales se pueden ubicar en la recta numérica, por lo tanto, podemos **definir un orden** en estos, es decir, podemos comparar dos números ubicados en la recta y afirmar cual número es mayor (o menor), dependiendo de su ubicación en esta.

Dos números **ocupan el mismo lugar en la recta numérica** si y solo si son el **mismo número**. Luego, si un número está más **a la derecha** que otro en la recta, decimos que es **mayor**. Análogamente, si un número está más **a la izquierda** que otro, decimos que es **menor**. Por ejemplo 5 es mayor que 3, ya que 5 se encuentra dos unidades desplazado de 3 hacia la derecha:



En esta guía sintetizaremos estas ideas con álgebra. También analizaremos las relaciones de orden entre los reales, las llamadas **desigualdades**, para lo cual utilizaremos los siguientes signos:

$a < b$	$a \leq b$	$a > b$	$a \geq b$
a es (estrictamente) menor que b	a es menor o igual que b	a es (estrictamente) mayor que b	a es mayor o igual que b

Cuando decimos a es menor o igual que b, significa que $a < b$ o $a = b$. Lo mismo pasa cuando decimos a es mayor o igual que b.

Por ejemplo, $3 \leq 4$, ya que se cumple que $3 < 4$, así mismo, $6 \leq 6$, ya que se cumple que $6 = 6$.

Ejemplos:

- $0 \leq x^2, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\pi > 3$, ya que $\pi = 3{,}141592\ldots$
- $2 < \sqrt{8} < 3$, ya que $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$
- $\frac{-3}{5} \geq \frac{-2}{3}$ (vimos cómo comparar dos números racionales en la guía de racionales)
- Mi edad $<$ Edad de mi abuelo (sería muy raro lo inverso)

Propiedades de las desigualdades

Ya hemos definido las relaciones de desigualdad, ahora estudiaremos algunas propiedades algebraicas que nos serán muy útiles.

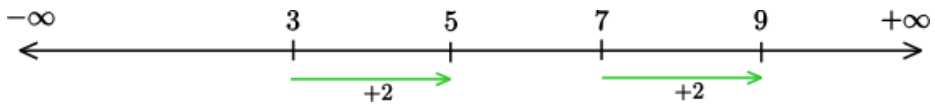
- **Suma:** Si $a < b$, entonces al sumarle c (positivo o negativo), a ambos lados, no cambia el sentido de la desigualdad. Es decir:

$$a < b \iff a + c < b + c$$

Esto se puede visualizar desplazando dos números en la recta numérica:

Sabemos que $3 < 7$, le sumamos el número 2 a ambos lados de la desigualdad:

$$\begin{aligned} 3 &< 7 \quad /\text{sumamos 2 a ambos lados} \\ 3 + 2 &< 7 + 2 \\ 5 &< 9 \quad /\text{¡se sigue cumpliendo la desigualdad!} \end{aligned}$$



- **Producto Positivo:** Si $a < b$, entonces al multiplicarlo por un número c **positivo** no cambia el sentido de la desigualdad. Es decir:

$$a < b \iff ac < bc$$

- **Producto negativo:** Si $a < b$, entonces al multiplicarlo por un número c **negativo**, **cambia el sentido de la desigualdad**. Es decir:

$$a < b \iff ac > bc$$

Ejemplo:

$$1 < 2$$

Al multiplicar a ambos lados por -1 obtenemos:

$$1 \cdot -1 > 2 \cdot -1$$

$$-1 > -2$$

- **Recíprocos:** Si $0 < a < b$ ó $a < b < 0$, entonces:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Todas las desigualdades estrictas ($<$ y $>$) presentadas anteriormente **se pueden reemplazar** por $\leq$ y $\geq$ y **se siguen teniendo las propiedades** (a excepción de la última, donde debería tenerse: $0 < a \leq b$ o $a \leq b < 0$ como condición).

Inecuaciones de Primer Grado

Motivación

Si nos dicen: *La cuarta parte de un número es a lo menos su mitad disminuida en 2.* Nos podemos preguntar ¿cuántos números enteros positivos satisfacen esta condición?

Esto se podría plantear con la siguiente expresión:

$$\frac{x}{4} \geq \frac{x}{2} - 2$$

Hoy veremos cómo rexolver este tipo de problemas.

Definición

Ya estudiamos las ecuaciones de primer grado, que se caracterizan por tener el signo igual $=$, es decir, son de la forma:

$$ax + b = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

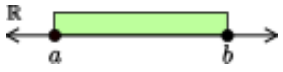
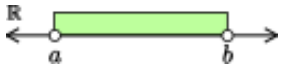
Cuando una **desigualdad presenta una incógnita**, como en el caso de las ecuaciones, se le dice **inecuación**. En esta parte, veremos las **inecuaciones de primer grado**, que son de la forma

$$ax + b \leq 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

donde el signo de la desigualdad también puede ser $<, >$ o $\geq$.

Intervalos en los Reales

Son subconjuntos de números reales que cumplen una desigualdad.

Intervalo cerrado desde a hasta b	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Intervalo abierto entre a y b	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Intervalo semiabierto o **semicerrado**	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	

Notamos que en los intervalos anteriores consideramos $a, b \in \mathbb{R}$. Esta noción se puede extender y podemos considerar que alguno de los extremos del intervalo sea $-\infty$ o $+\infty$. Como ningún número real puede ser igual a infinito, se anotará con el **corchete abierto cuando se involucre el infinito**.

Por ejemplo, la expresión:

$$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

Sintetiza todos los números a la izquierda de a en la recta numérica.

La expresión:

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Sintetiza todos los números a la derecha de a en la recta numérica.

Y esta última expresión:

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Sintetiza todos los reales en un intervalo.

Inecuaciones de Primer Grado con una Incógnita

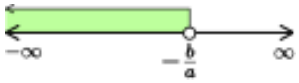
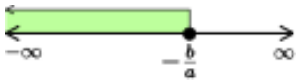
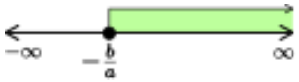
La diferencia con las ecuaciones de primer grado radica en que ahora **las soluciones son intervalos**, mientras en las ecuaciones eran, en general, una única solución.

Al resolver una inecuación, lo ideal es reducir la desigualdad dejando todos los valores a un lado, y el otro igualarlo a cero. Nos referimos a dejarlas de la forma $ax + b \leq 0$ con $a \neq 0$. Luego, podemos despejar x para obtener el intervalo de solución.

$$\begin{aligned} ax + b &\leq 0 \quad / \text{ restamos } b \text{ a ambos lados} \\ ax &\leq -b \end{aligned}$$

Un **clásico error** es dividir por a sin preocuparse de su signo. Siempre hay que recordar que si multiplicamos por un número positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, mientras que **si multiplicamos por un número negativo, ¡el sentido de la desigualdad cambia!** Entonces, dependiendo del signo de a vamos a poder despejar x correctamente.

Analicemos las diferentes situaciones.

Inecuación	**Conjunto Solución**	**Representación Gráfica**
$x < -\frac{b}{a}$	$S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$	
$x \leq -\frac{b}{a}$	$S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$	
$x > -\frac{b}{a}$	$S = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$	
$x \geq -\frac{b}{a}$	$S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$	

Ejemplo: Sea a un número real fijo. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $-5x+7 < 3a$?

Solución: Despejamos x como vimos antes:

$$\begin{aligned} -5x + 7 &< 3a \\ -5x &< 3a - 7 \\ x &> \frac{3a-7}{-5} \\ x &> \frac{7-3a}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$S = \left]\frac{7-3a}{5}, +\infty\right[$$

Problemas de Inecuaciones

Lo esencial es relacionar las expresiones con los signos. Por ejemplo, tenemos *a lo menos*, *como mínimo* (correspondientes a $\geq$), *a lo más*, *como máximo* (correspondientes a $\leq$), *sobrepasa* ($>$), *no alcanza* ($<$), etc. Luego de escribir el problema en términos matemáticos se resuelve la inecuación (o sistema de inecuaciones).

¡OJO! Estos ejercicios pueden aparecer relacionados con **dominio** y recorridos de funciones.

Ya lo veremos en la guía de funciones.

1. Si la suma de dos números enteros impares consecutivos es, a lo más, 28, ¿cuáles son los mayores números enteros que cumplen dicha condición?

Solución: Dos números impares consecutivos se pueden representar como $(2n+1)$ e $(2n+3)$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. La restricción de que la suma de estos dos números es a lo más 28 quiere decir que no puede superar 28 (como máximo). Escrito en lenguaje matemático:

$$2n + 1 + 2n + 3 \leq 28$$

Ahora queda resolver esta desigualdad:

$$\begin{aligned} 2n + 1 + 2n + 3 &\leq 28 \\ 4n + 4 &\leq 28 \\ 4n &\leq 28 - 4 \\ 4n &\leq 24 \\ n &\leq \frac{24}{4} \\ n &\leq 6 \end{aligned}$$

Los mayores números que satisfacen la desigualdad es cuando $n = 6$. Por lo tanto $(2 \cdot 6 + 1) = 13$ y $(2 \cdot 6 + 3) = 15$. Entonces la respuesta a nuestro problema son los números 13 y 15.

2. El sueldo que recibe una persona fluctúa entre \$ 550.000 y \$625.000. Si mensualmente tiene gastos que varían entre \$360.000 y \$ 410.000, ahorrando el resto, ¿cuales son los montos mínimo y máximo que puede ahorrar en un mes?

Solución: Para calcular el mímimo que puede ahorrar se debe considerar el mínimo de sueldo y el máximo de gasto:

$$\begin{aligned} x + 410.000 &\geq 550.000 \\ x &\geq 550.000 - 410.000 \\ x &\geq 140.000 \end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular el máximo que puede ahorrar se debe considerar el máximo de sueldo y el mínimo de gasto:

$$\begin{aligned} x + 360.000 &\leq 625.000 \\ x &\leq 625.000 - 360.000 \\ x &\leq 265.000 \end{aligned}$$

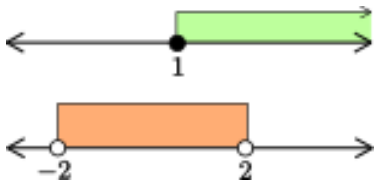
Entonces la persona puede ahorrar en un mes un monto entre \$ 140.000 y \$ 265.000.

Sistemas de Inecuaciones de Primer Grado con una Incógnita

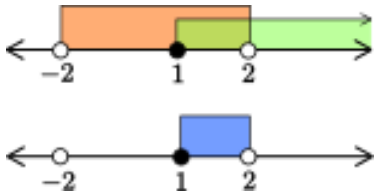
Cuando una incógnita debe satisfacer **más de una inecuación**, se habla de un **sistema de inecuaciones**, donde ahora la solución que encontremos tiene que satisfacer todas las restricciones simultáneamente. En este caso, dependiendo de las soluciones que tenga cada una de las inecuaciones, el sistema puede tener una cantidad finita o infinita de soluciones, incluso ninguna solución (llamada **solución vacía**), tal como ocurre en los sistemas de ecuaciones de primer grado.

Por lo general, la forma más simple de resolver estos sistemas es hacer una representación gráfica de la solución de cada inecuación en una misma recta numérica. Luego, es útil destacar de alguna forma las regiones donde haya coincidencias entre las soluciones de cada inecuación. Esto se conoce como la **intersección** de las soluciones de cada inecuación y será la **solución del sistema de inecuaciones**.

Por ejemplo, tomamos los intervalos $I_1 = [1, +\infty[$ y $I_2 =]-2, 2[$.



Ahora, intersectamos los intervalos y vemos con el dibujo cual es el intervalo resultante.



Con lo que notamos que la intersección de I_1 con I_2 es el intervalo $[1, 2[$.

Matemáticamente, si tenemos n inecuaciones y conocemos el conjunto solución de todas ellas, podemos denotarlos como S_1, S_2, ..., S_n. Luego, la intersección de las soluciones se denota por

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ... \cap S_n$$

Así, el conjunto solución del sistema suele ser más pequeño que el conjunto solución de cada inecuación por separado, lo que tiene sentido pues ahora la incógnita debe satisfacer más restricciones. Eventualmente, puede darse que ningún valor real puede satisfacer todas las inecuaciones al mismo tiempo, lo que gráficamente quedará evidenciado por que no habrá una región en donde todos los conjuntos solución coincidan. Como ya se ha dicho, esto se llama solución vacía, lo que se denota por el conjunto $\varnothing$.

Inecuaciones con Valor Absoluto

Recordemos que el valor absoluto de un número siempre es mayor o igual a 0, por lo que se puede escribir:

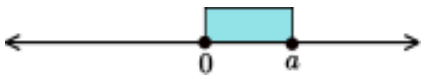
$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia con lo anterior, cada vez que se tenga una inecuación donde la incógnita pertenezca a una expresión dentro de un valor absoluto, **se debe considerar los casos en que la expresión tiene signo positivo y luego cuando la expresión tiene signo negativo**. Después, la solución para la inecuación será la **unión de las soluciones de cada caso** (denotada con el signo $\cup$). Así, se puede concluir dos resultados:

- Consideramos $|x| \leq a$ con a positivo (notar que si es negativo no existe solución, ya que el valor absoluto siempre es mayor o igual a 0), y vemos los casos mencionados:

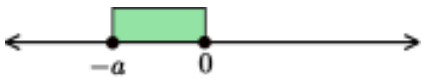
  Caso 1: $x \geq 0$. Entonces, $|x| \leq a \Longrightarrow x \leq a$.
  Por lo tanto, el conjunto solución para este caso es la intersección del conjunto que cumple la inecuación del caso ($x \geq 0$), con el conjunto que cumple la inecuación original, que ahora está sin valor absoluto ($x \leq a$). Es decir,

  $$S_1 = [0, +\infty[\cap]-\infty, a] = [0, a]$$

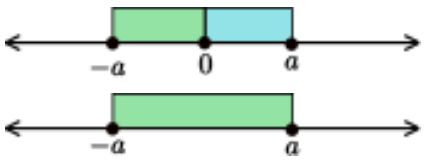
  Caso 2: $x < 0$. Entonces, $|x| \leq a \Longrightarrow -x \leq a$.
  Al despejar x cambia el sentido de la desigualdad, por lo tanto, la inecuación queda $x \geq -a$. Así, el conjunto solución de este caso es:

  $$S_2 =]-\infty, 0[\cap [-a, +\infty[= [-a, 0[$$

  Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es:

  $$S = S_1 \cup S_2 = [0, a] \cup [-a, 0[= [-a, a]$$

- Consideramos $|x| \geq a$ con a positivo (notar que si a es negativo, la solución es todo $\mathbb{R}$). Entonces, procedemos igual que antes y llegaremos a que la solución es

$$S =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

Ahora, veamos una inecuación un poco más compleja:

Ejemplo: Determine el conjunto solución de la inecuación $|1 - 2x| + x \geq 3$.

Solución: Primero, hay que saber para qué valores de x la expresión dentro del valor absoluto toma valores positivos o negativos. Para eso, vemos el punto donde el valor de $1 - 2x$ se hace 0.

$$1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Luego, como el coeficiente que acompaña a x es negativo (-2), se tiene que si $x > \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - 2x < 0$. Por otro lado, si $x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - 2x \geq 0$. Así, obtenemos los casos que nos tenemos que poner para eliminar el valor absoluto de la inecuación.

Caso 1: $x \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - 2x \geq 0$. Entonces, $|1 - 2x| + x \geq 3 \Longrightarrow 1 - 2x + x \geq 3 \Longrightarrow 1 - x \geq 3$. Despejando x de la inecuación, resulta $x \leq -2$. Por lo tanto,

$$S_1 = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cap]-\infty, -2] =]-\infty, -2]$$

Caso 2: $x > \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 - 2x < 0$. Entonces, $|1 - 2x| + x \geq 3 \Longrightarrow -(1 - 2x) + x \geq 3 \Longrightarrow 3x - 1 \geq 3$. Despejando, se obtiene $x \geq \frac{4}{3}$. Por ende,

$$S_2 = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[= \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

Finalmente, la solución es la unión de las soluciones de los casos, por lo tanto, queda:

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

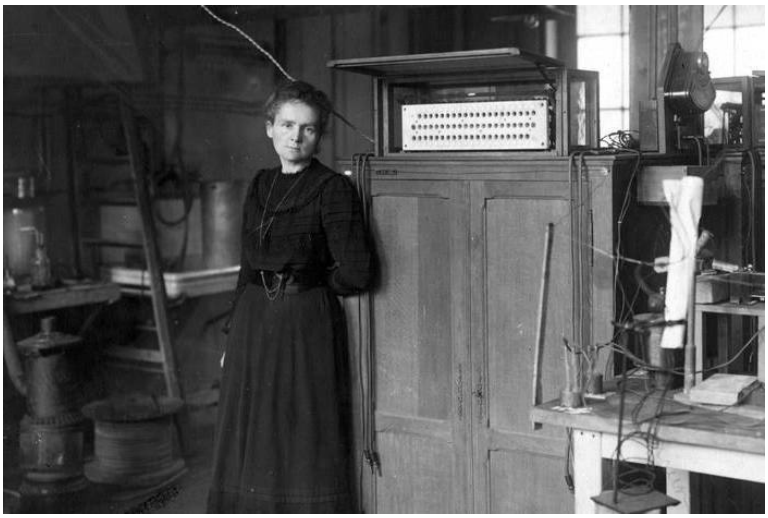


Figura 1: Maria Salomea Skłodowska-Curie

Científica Destacada: Marie Curie

Nació el 7 de noviembre de 1867, y murió el 4 de julio de 1934. Fue una científica polaca nacionalizada francesa, pionera en el campo de la radiactividad. Fue la primera persona en recibir dos premios Nobel en distintas especialidades (Física y Química) y la primera mujer en ocupar el puesto de profesora en la Universidad de París. En 1995 fue sepultada con honores en el Panteón de París por méritos propios.

Estudió clandestinamente en Varsovia y comenzó su formación científica en dicha ciudad. En 1891, a los 24 años, siguió a su hermana mayor Bronisława Dłuska a París, donde culminó sus estudios y llevó a cabo sus trabajos científicos más sobresalientes. Compartió el premio Nobel de Física de 1903 con su marido Pierre Curie y el físico Henri Becquerel. Años después, ganó en solitario el premio Nobel de Química de 1911. Nombró el primer elemento químico que descubrió, el polonio, como su país de origen.

Sus logros incluyen los primeros estudios sobre el fenómeno de la radiactividad (término que ella misma acuñó), técnicas para el aislamiento de isótopos radiactivos y el descubrimiento de dos elementos —el polonio y el radio—. Bajo su dirección, se llevaron a cabo los primeros estudios en el tratamiento de neoplasias con isótopos radiactivos.

Fundó el Instituto Curie en París y en Varsovia, que se mantienen entre los principales centros de investigación médica en la actualidad. Durante la Primera Guerra Mundial creó los primeros centros radiológicos para uso militar.

Murió en 1934 a los 66 años, en el sanatorio Sancellemoz en Passy, por una anemia aplásica causada por la exposición a la radiación de tubos de ensayo con radio que guardaba en los bolsillos en el trabajo y en la construcción de las unidades móviles de rayos X de la Primera Guerra Mundial.