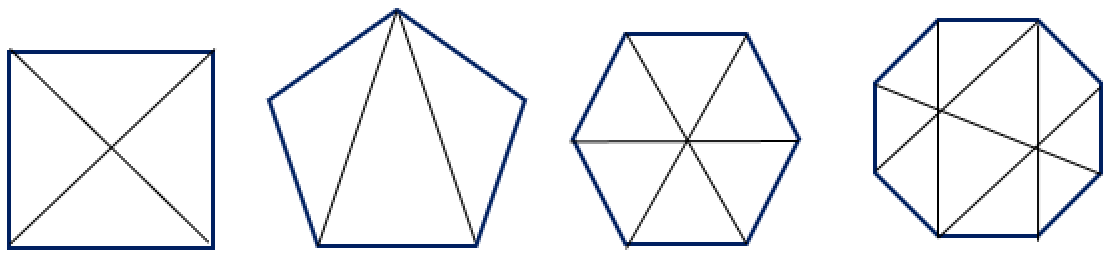
Triángulos

Eje temático: Geometría

Triángulos

Motivación

Los triángulos son unas de las figuras geométricas más utilizadas por las personas. Cumplen la carácterística de ser el tipo de polígono con la menor cantidad de lados. De alguna u otra manera, los triángulos pueden recubrir los polígonos que nosotros conocemos:



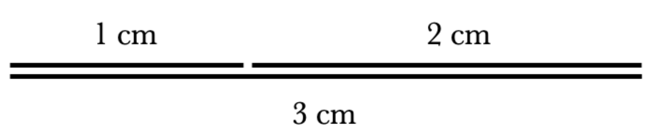
Es por eso que debemos tenerles respeto, pues donde veamos figuras planas es probable que hayan escondidos múltiples triángulos. ¿Los has visto en los elementos que te rodean cotidianamente?

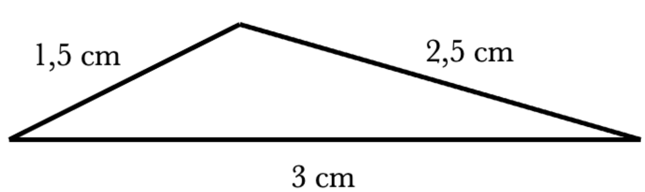
Definición

Los **triángulos** son los polígonos de menor cantidad de lados, por ende, son esenciales. Poseen **tres lados y tres ángulos**. Los triángulos cumplen con una regla fundamental: *la desigualdad triangular*.

Les tenemos un desafío que debe hacerse manualmente: Corten un hilo en 3 segmentos de 1, 2 y 3 cm respectivamente. Hagan un triángulo. (Si no tienes hilo hazo con una regla y trazas líneas). ¿Qué se obtiene?

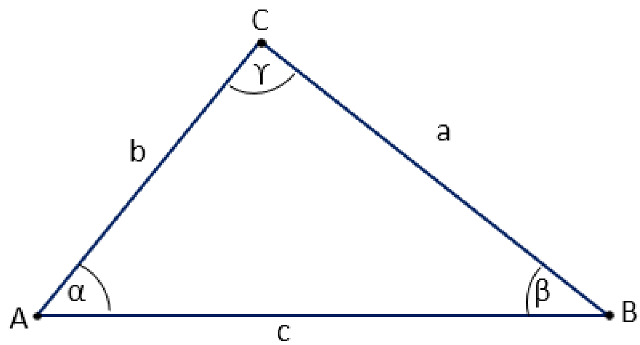
¡No se puede obtener un triángulo! Lo que pasa es que se debe tener un poco más de trazo entre los lados menores para superar al mayor y tener un triángulo:





Esta es la regla fundamental que cumplen los triángulos: **En todo triángulo, la medida de cada lado es menor que la suma y mayor que la diferencia de las medidas de los otros dos.**

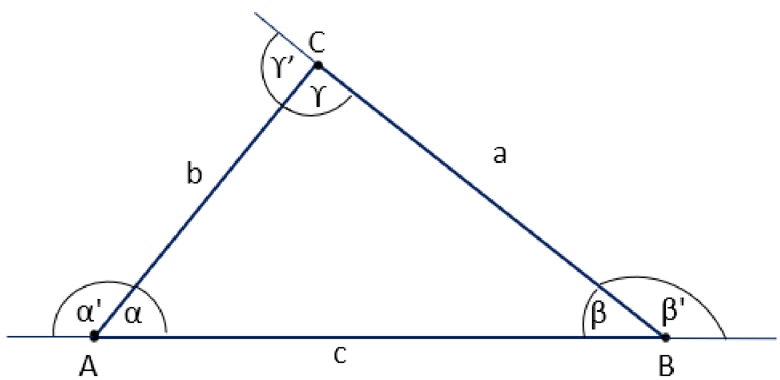
Es decir, que para un triángulo de lados a, b y c se debe cumplir que $a < b + c$ y que $a > c - b$:



Lo anterior se conoce como **Desigualdad Triangular**. ¡Esa propiedad debe ocurrir para todos los lados!

Particularidades Geométricas de los Triángulos

Existen variadas particularidades relacionadas con la geometría de los triángulos que listaremos a continuación:



- La **suma** de las medidas de los **ángulos interiores es igual a 180º**. Es decir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$$

- La **suma** de las medidas de los **ángulos exteriores es igual a 360º**. Es decir:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^{\circ}$$

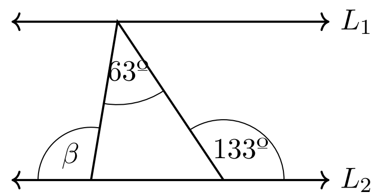
- La medida de cada **ángulo exterior** es igual a la **suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes** a él. Es decir:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta$$

Ejercicio Resuelto:

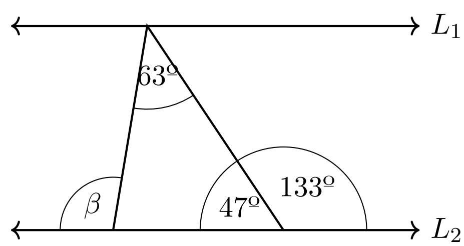
Si en la figura, $L_1 \parallel L_2$, ¿cuál es el valor de β?

(a) 47º
(b) 70º
(c) 110º
(d) 133º
(e) 147º



Solución:

Primero, calculamos el ángulo que es adyacente a 133º: 180º-133º=47º:



Luego, como la medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de la medida de los ángulos interiores no adyacentes a el, entonces:

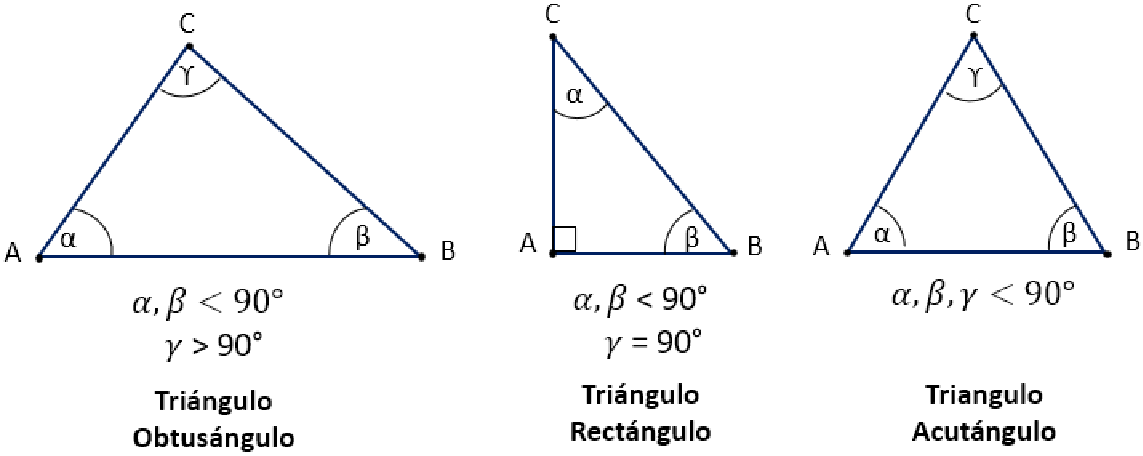
$$\beta = 63º + 47º = 110º$$

Finalmente β mide 110º, siendo (c) la respuesta correcta.

Clasificación de los Triángulos

Los triángulos los podemos clasificar según dos criterios: la relación entre los **ángulos** y la relación entre los **lados** de estos.

Según sus Ángulos

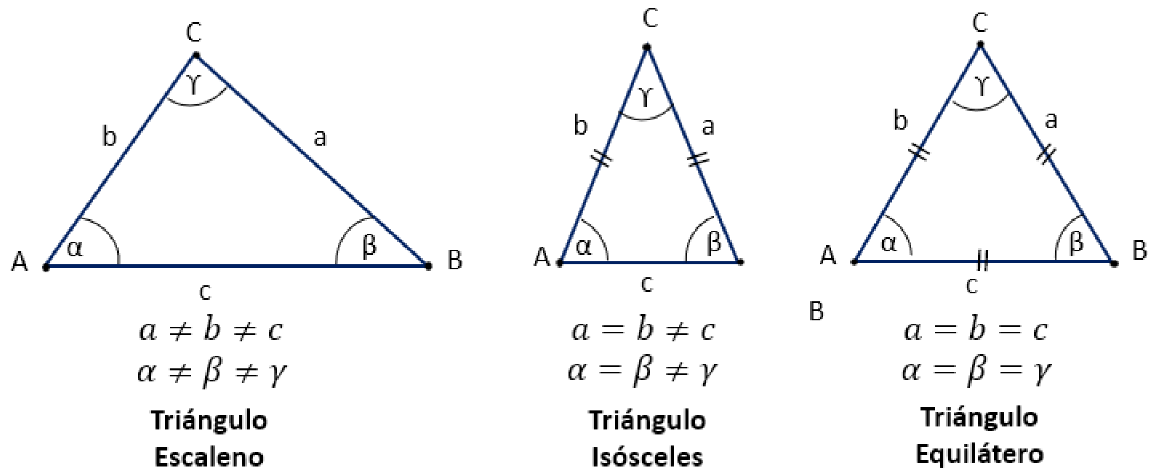


- **Obtusángulo:** Uno de sus ángulos es **obtuso**, es decir, mayor que 90°. Esto implica que los ángulos que no son el obtuso necesariamente son agudos.

- **Rectángulo:** Tiene un ángulo **recto**, es decir, mide 90°.

- **Acutángulo:** Sus tres ángulos son **agudos**, es decir, todos miden menos de 90°.

Según sus Lados



- **Escaleno**: Sus **tres lados tienen distinta medida**. Notar que, por lo tanto, sus tres **ángulos interiores son distintos** entre sí. Pueden también ser obtusángulo, rectángulo y acutángulo.

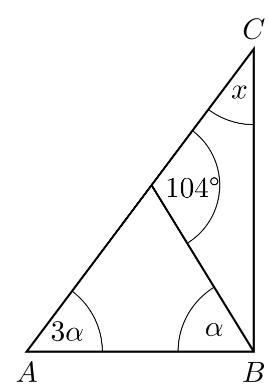
- **Isósceles**: Exactamente **dos de sus lados tienen igual medida**, por lo tanto, tiene **dos ángulos interiores iguales**. Pueden también ser obtusángulo, rectángulo y acutángulo.

- **Equilátero**: Sus **tres lados tienen igual medida**, por lo tanto, sus **tres ángulos interiores son iguales**. Además, como la suma de los ángulos interiores debe ser 180°, **cada ángulo interior mide** 60°. Sólo puede ser acutángulo.

Ejercicios Propuestos:

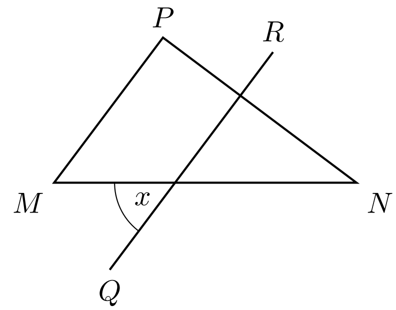
1. El $\triangle ABC$ de figura, es rectángulo en B. ¿Cuál es la medida de x?

   a) 12º
   b) 26º
   c) 38º
   d) 68º
   e) 78º



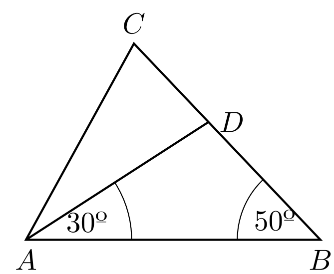
2. En la figura, $\triangle MNP$ es equilátero. Si $\overline{MP} \parallel \overline{QR}$, ¿cuál es el valor de x?

   a) 20º
   b) 30º
   c) 40º
   d) 50º
   e) 60º



3. El $\triangle CAD$ de figura, es isósceles de base $\overline{CD}$. ¿Cuál es la medida del $\angle CAD$?

   a) 20º
   b) 30º
   c) 40º
   d) 50º
   e) 100º



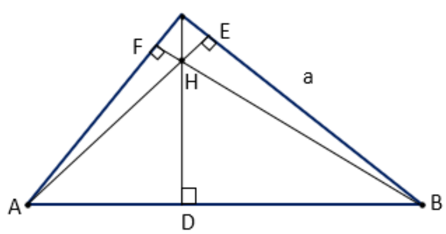
Elementos de los Triángulos

Existen diferentes elementos significativos en los triángulos, que son segmentos que se trazan en lugares específicos y cumplen con particularidades esenciales.

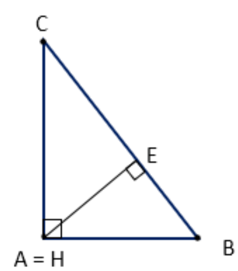
Altura:

La **altura** es un segmento que va **desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto**, de manera **perpendicular**, es decir, el ángulo que forma la altura con el lado opuesto es 90°.

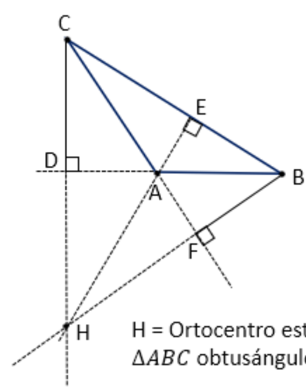
Notamos que se pueden trazar 3 alturas en un triángulo (desde cada vértice se puede trazar una). Luego, algo muy interesante que sucede es que, en todos los triángulos, las alturas se intersectan en un mismo punto, llamado **ortocentro**. Este no necesariamente está dentro del triángulo.



H = Ortocentro (Punto de intersección de las alturas)



H = Ortocentro coincide con el vértice recto del ΔABC

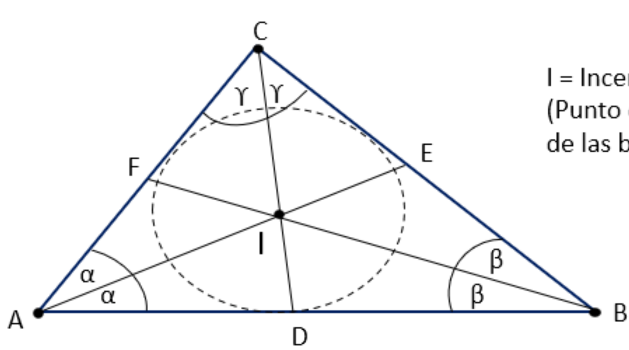


H = Ortocentro está fuera del ΔABC obtusángulo

Bisectriz:

Una **bisectriz** es un segmento que va **desde un vértice de un triángulo hasta el lado opuesto**, de manera que **divide al ángulo del vértice en dos ángulos congruentes**.

Desde cada vértice se puede trazar una bisectriz y, estas, se intersectan en un punto llamado **incentro**. Además, el incentro cumple ser el **centro del círculo inscrito en el triángulo**, el cual se muestra en la siguiente figura.

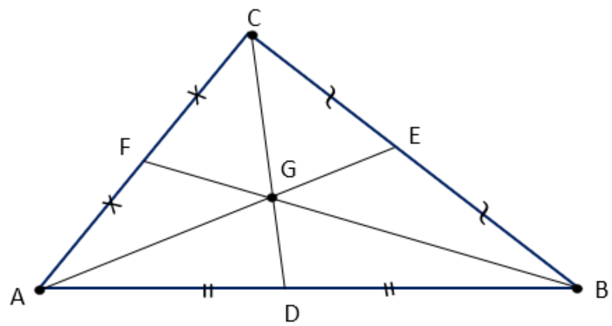


I = Incentro (Punto de intersección de las bisectrices)

Transversal de Gravedad:

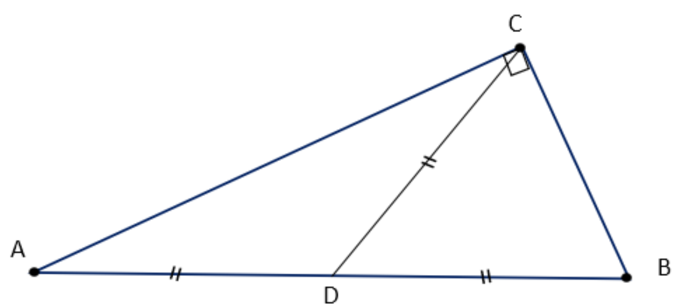
Una **transversal de gravedad** es el segmento que **une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto**.

Tal cual los segmentos anteriores, las tres transversales de gravedad se intersectan en un punto llamado **baricentro, gravicentro o centro de gravedad**.



$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GF} = \frac{2}{1}$$

Figura 1: Ejemplo de triángulo en el que se trazan las tres transversales de gravedad.



$$AD = BD = DC$$

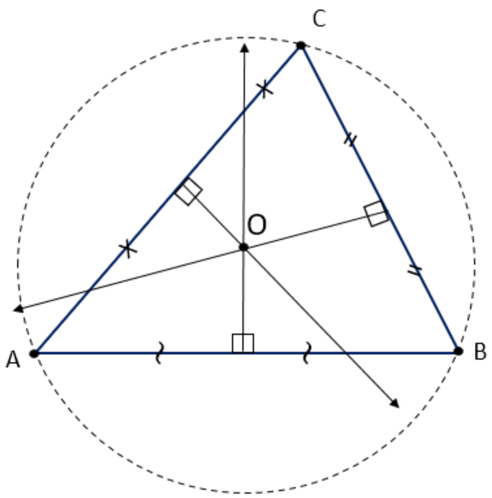
Figura 2: Caso particular en el que se traza la transversal de gravedad de un triángulo rectángulo desde su ángulo recto, generando que $AD \cong BD \cong DC$.

Existen unas cuantas propiedades que surgen de la Transversal de Gravedad que veremos con mayor detalle cuando estudiemos Semejanza y Congruencia.

Simetral:

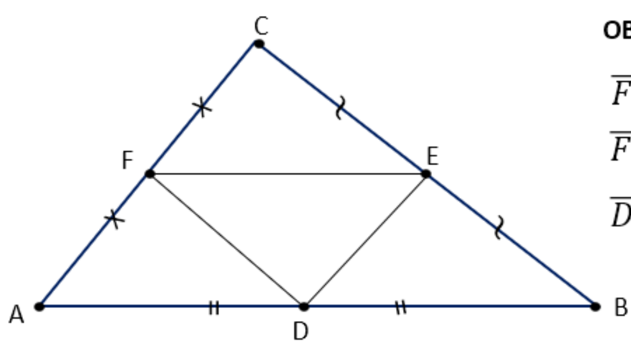
La **simetral** es la recta que **pasa por el punto medio** de algún lado del triángulo de manera **perpendicular** (u **ortogonal**).

Como hay tres lados en un triángulo, hay tres simetrales, las cuales se intersectan en un punto llamado **circuncentro**, el cual es el **centro del triángulo circunscrito**, mostrado en la siguiente figura.



Mediana:

La **mediana** es un segmento que **une los puntos medios de dos lados** del triángulo. Es posible dibujar las tres medianas que están en un triángulo de tal manera que estas generan **4 triángulos congruentes** y que al mismo tiempo son semejantes al triángulo original (ya veremos más adelante la importancia de la congruencia y al semejanza de las figuras planas).



OBSERVACIONES

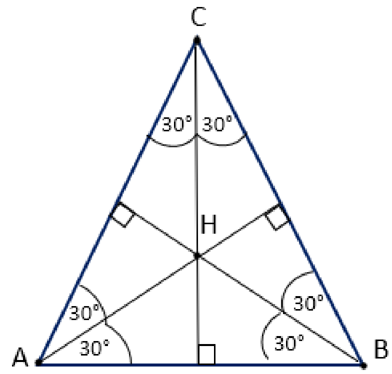
$\overline{FE} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{FE}$

$\overline{FD} \,//\, \overline{BC}$ y $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{FD}$

$\overline{DE} \,//\, \overline{AC}$ y $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{DE}$

$$\Delta ADF \cong \Delta DBE \cong \Delta FEC \cong \Delta EFD$$

Observación: en un triángulo equilátero la alturas, las bisectrices, las transversales de gravedad y las simetrales son las misma.

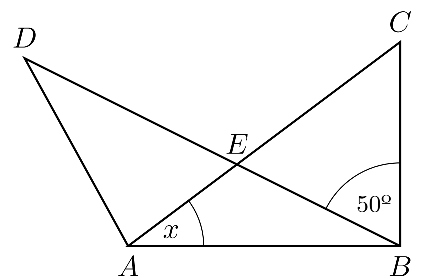


Triángulo Equilátero

Ejercicios Propuestos:

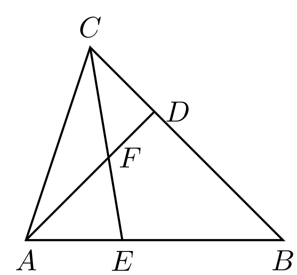
1. En la figura $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle DAB$ y $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. ¿Cuál es el valor de x?

   a) 25º
   b) 30º
   c) 40º
   d) 50º
   e) 70º



2. En la figura, $\angle CAB = 70º$ y $\angle ABC = 40º$. Si $\overline{AD}$ es altura y $\overline{CE}$ bisectriz, ¿cuál es la medida de $\angle DFE$?

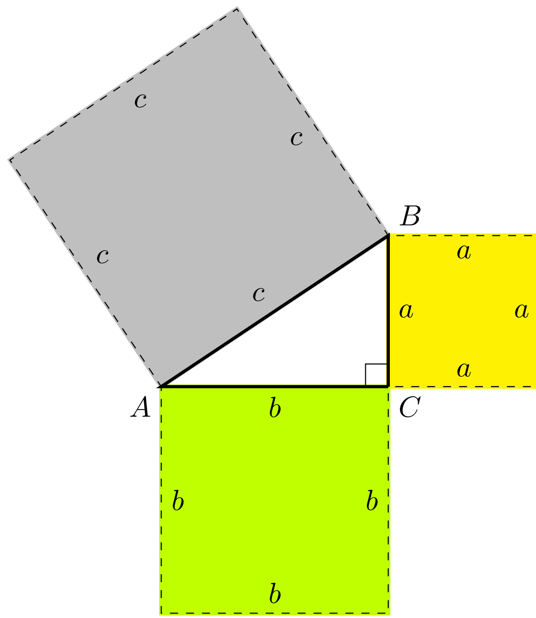
   a) 125º
   b) 115º
   c) 55º
   d) 35º
   e) 20º



Teorema de Pitágoras

Es muy probable que hayas escuchado alguna vez del famoso teorema de Pitágoras, el cual plantea que en un triángulo rectángulo, **la suma de los catetos al cuadrado es equivalente a la hipotenusa al cuadrado**:

Si lo expresamos de forma geométrica, el teorema de Pitágoras quiere decir que el área de un cuadrado de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de otros dos cuadrados cuyos lados son cada uno de los catetos respectivamente.



En la figura se puede apreciar las áreas de los dos catetos a y b y de la hipotenusa c como: a^2 , b^2 y c^2.

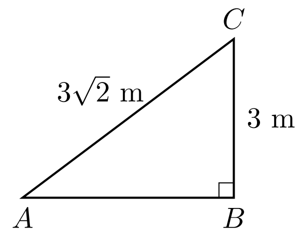
El teorema de Pitágoras afirma que siempre se cumple la siguiente relación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De esta ecuación se deducen tres corolarios de verificación algebraica y aplicación práctica:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo: En el $\triangle ABC$ de la figura, ¿cuál es la medida del lado $\overline{AB}$?



Solución: Llamando x al cateto $\overline{AB}$, como tenemos el valor de un cateto y la hipotenusa, se usa la fórmula para encontrar el otro cateto:

$$a^2 + x^2 = c^2 \Longleftrightarrow x^2 = c^2 - a^2$$

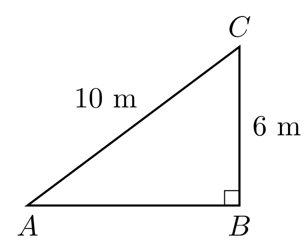
$$x = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = \sqrt{9 \cdot 2 - 9} = \sqrt{9} = 3$$

El cateto $\overline{AB}$ mide 3 m.

Ejercicios Propuestos:

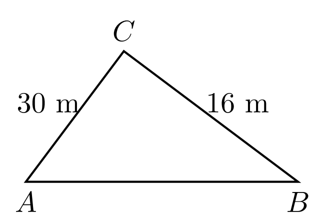
1. En el $\triangle ABC$ de la figura, ¿cuál es la medida del lado $\overline{AB}$?

   a) $\sqrt{8}$ m.
   b) 6 m.
   c) 8 m.
   d) $\sqrt{88}$ m.
   e) 10 m.



2. El $\triangle ABC$ de la figura, es rectángulo en C. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{AB}$?

   a) 7 m.
   b) 8 m.
   c) 11 m.
   d) 34 m.
   e) 194 m.



Veamos ciertos triángulos rectángulos que son notables:

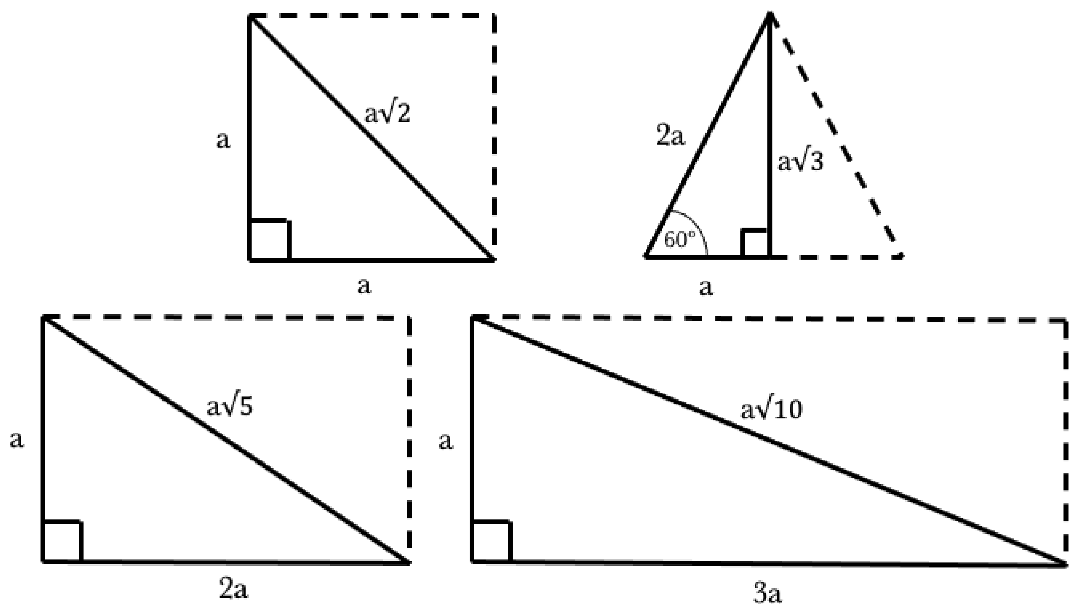


Figura 3: Triángulos Rectángulos Notables

Lo interesante es que muchas veces encontramos una recurrencia en los tríos de números que cumplen con el teorema de Pitágoras. A estos los llamamos tríos pitagóricos:

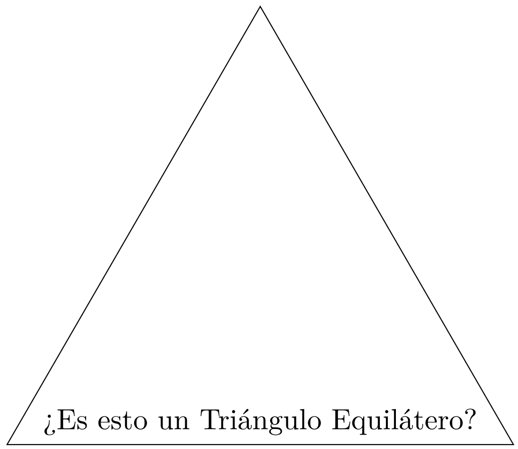
Tabla 1: Tríos Pitagóricos más utilizados.

a	b	c	Tipo de Triángulo
1	$\sqrt{3}$	2	Escaleno
1	1	$\sqrt{2}$	Isósceles
3	4	5	Escaleno
5	12	13	Escaleno
8	15	17	Escaleno

Desafío: Demuestra que los números listados como tríos pitagóricos efectivamente cumplen el Teorema de Pitágoras.

Observación Fundamental

El **clásico error** que comenten l@s estudiantes a la hora de resolver un problema de geometría es asumir que los dibujos son *leales*. En esta guía estudiamos diferentes tipos de triángulos, y lo que nos permitía diferenciar entre cada uno correspondía la medida de sus lados y ángulos. Así mismo, se debe ser capaz de dudar, en especial si no se definen los datos esenciales de los triángulos.



Nuestra intuición nos dice que sí, ya que observamos que es una figura plana que posee tres lados iguales y hay mucha simetría. **¡Pero no necesariamente lo es!** Todo lo dicho anteriormente se basa en la intuición, lo que es incorrecto cuando hablamos de geometría. Recuerden que las matemáticas son como un juego de mesa. Ganarás si sigues las reglas al pie de la letra. ¿Cuál es la regla aquí? Es que para que la figura sea un triángulo equilátero debe cumplir con la definición exacta, nos deben decir la medida de los ángulos o de los lados. Parece más difícil de lo que en realidad es. Con práctica podrás superar todos estos problemas.

Figura 4: Lise Meitner

Científica Destacada: Lise Meitner

Lise Meitner (Viena, 7 de noviembre de 1878-Cambridge, 27 de octubre de 1968) fue una científica física sueca de origen austriaco que investigó la radiactividad y en física nuclear.

Nació en Viena en el seno de una familia judía. Estudió en las universidades de Viena, donde ingresó en 1901 y se doctoró en 1907, y de Berlín donde ingresó para seguir las clases de Max Planck. Trabajó con Otto Hahn en una investigación que duró más de treinta años, con quien descubrió el protactinio en 1918. Fue profesora en el Instituto de Kaiser Wilhelm y la Universidad de Berlín desde 1926 hasta 1933.

A finales de 1938 tuvo que abandonar Alemania, forzada por las Leyes de Núremberg del Gobierno de la Alemania nazi, y se unió al personal de investigación atómica del Instituto de Manne Siegbahn en la (Universidad de Estocolmo). Con la contribución de Meitner, se produjo el primer ejemplo de la fisión nuclear creada por personas, aunque no se dieron cuenta de lo logrado hasta que ella supo interpretar los resultados. Es por eso que Otto Hahn recibió el Premio Nobel. Es a menudo considerada uno de los más evidentes ejemplos de hallazgos científicos hechos por mujeres y pasados por alto por el comité del Nobel.

Un estudio publicado en 1997 por la revista Physics Today concluyó que la omisión de Meitner fue «un raro ejemplo en el que opiniones personales negativas aparentemente llevaron a la exclusión de un científico que merecía el premio».

El elemento n.º 109, meitnerio, fue nombrado en su honor.