Técnicas de Conteo

Eje temático: Datos y Azar

Técnicas de Conteo

Motivación

En esta guía veremos cómo abordar situaciones y fenómenos cotidianos acerca de las **posibles formas de ordenar o agrupar** en distintos contextos. A modo de ejemplo, imaginemos un curso de 30 estudiantes compuesto de 16 mujeres y 14 hombres: **¿de cuántas maneras se puede formar una directiva de curso de 4 integrantes que cumpla la paridad?** Sabiendo técnicas de conteo podemos responder esa pregunta. Recordemos que Chile será el primer país en escribir una constitución bajo la paridad de género.

Para responder estas preguntas se debe contar la cantidad de casos posibles. Si bien la palabra contar puede parecer simple, hay que tener mucho cuidado al hacerlo ya que no es para nada trivial. Por esto, estudiaremos diferentes técnicas, como las permutaciones, variaciones, combinaciones y más.

Definiciones

Existen diversas técnicas que nos permiten contar el número de elementos de un conjunto finito caracterizado por ciertas propiedades. Esta área de la matemática estudia la **enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones** que satisfacen ciertas condiciones establecidas. Además, estudia las ordenaciones o agrupaciones de un determinado número de elementos.

Esta materia consiste principalmente en entender técnicas para simplificar cálculos esenciales y luego aplicarlos en el ámbito de la probabilidad. Es necesario (en general), determinar el número total de casos posibles de cierto experimento. Para eso se deben comprender los siguientes conceptos:

- **Principio Multiplicativo**:

  Si algo ocurre en k **etapas** (distintas o no), en donde la primera puede ocurrir de n_1 formas distintas, la segunda de n_2 formas distintas, y así, hasta que la última ocurre de n_k formas distintas, entonces **el número total de maneras que puede ocurrir** es de:

  $$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

  Ejemplo: Si en un restaurant existen 3 platos distintos de entrada, 4 platos de fondo y 2 tipos de postres, ¿Cuántos almuerzos (entrada/fondo/postre) distintos podrá elegir una persona?

  Usando el principio multiplicativo, el proceso ocurre en **3 etapas** (elegir entrada, fondo y postre), las cuales tienen **3, 4 y 2 formas distintas de elegir, respectivamente**, entonces el número total es: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ maneras distintas de elegir un almuerzo.

- **Principio Aditivo**:

  Si algo puede ocurrir de k **maneras**, en donde la primera puede darse de n_1 formas, la segunda de n_2 formas, y así, entonces el **número total de maneras que puede ocurrir** es de:

  $$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Ejemplo: Si una persona va a una automotora y existen 5 modelos de la marca A, 4 modelos de la marca B, y 6 modelos de la marca C, ¿de cuántas formas puede comprar un auto?

Notamos que hay 3 tipos de autos por comprar: A, B y C, los cuales tienen 5, 4 y 6 modelos distintos. Entonces se tienen $5 + 4 + 6 = 15$ formas distintas de comprar un auto.

Observación: El principio multiplicativo se diferencia del aditivo, ya que en el primero, tengo que elegir una opción en cada etapa, es decir, elegir una en la primera **Y** una en la segunda **Y** una en la tercera **Y** ... **Y** una en la k-ésima. Mientras que el aditivo, tengo que elegir una opción en la primera **O** en la segunda **O** en la tercera **O** ... **O** en la k-ésima. Por eso es que relacionamos la **letra *y* con el principio multiplicativo** y **la letra *o* con el principio aditivo.**

Factorial

Estos problemas de conteo pueden involucrar muchísimas multiplicaciones consecutivas, lo que puede llegar a complicar los cálculos y las notaciones.

Para esto, se define el **factorial** como el **producto de todos los antecesores del número natural, incluyendo al mismo número**. Luego, este sería de la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Por conveniencia, se estableció que $0! = 1$
- **Propiedad Fundamental**: $n! = n \cdot (n-1)!$

Ejemplo:

Esta última propiedad es muy útil para simplificar los cálculos, por lo que veremos en un caso aplicado que esta es válida.

Calcule $\dfrac{7!\,2!}{6!}$

Solución: A partir de la definición de factorial, podemos escribir el factorial como

$$\begin{aligned} \frac{7!\,2!}{6!} &= \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{5040 \cdot 2}{720} \\ &= \frac{10080}{720} \\ &= 14 \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{7!\,2!}{6!} &= \frac{7 \cdot 6! \ \cdot 2!}{6!} \\ &= \frac{7 \cdot \cancel{6!}\,2!}{\cancel{6!}} \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Se observa que ambos cálculos llegan al mismo resultado. Sin embargo, el primer método puede ser engorroso y complicado de calcular (y en general los factoriales son números muy grandes); por lo que utilizar este último resulta mucho más fácil y nos permite evitar errores.

Permutaciones

La palabra fundamental en esta clasificación es **orden**: las **permutaciones** son **cada una de las distintas formas en las que se pueden ordenar los elementos de un conjunto**. Existen tres tipos y para estos problemas haremos uso de una notación que servirá para entender el mecanismo.

- **Permutación Lineal (o Simple)**: Son las **permutaciones u órdenes que podemos hacer de un conjunto de elementos sin repetirlos**. Una forma de entenderlo, es hacer una fila de k personas y pensar: ¿de cuántas maneras puedo ordenarlos? **¡Ojo que las personas las podemos distinguir, pues cada persona es única!** Ya veremos casos donde los elementos no son distinguibles, como las monedas o dulces.

  Para entender el resultado, veamos el siguiente ejemplo:

  ¿De cuántas maneras puedo ordenar a 5 personas en una fila de 5 sillas?

  Como las personas no deben pelear por su silla (puesto que tod@s se podrán sentar) podemos disponerlas en una línea:

  $$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

  Claramente, en la primera locación podríamos poner a 5 personas:

  $$\underline{5}\ \_\ \_\ \_\ \_$$

  Luego, como ya determinamos la primera persona, la segunda locación puede estar ocupada por alguna de las 4 personas restantes:

  $$\underline{5}\ \underline{4}\ \_\ \_\ \_$$

  Y si iteramos ese razonamiento:

  $$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$$

  Luego, por el principio multiplicativo, vimos que si un evento ocurre en etapas, estas se deben multiplicar. Esto exactamente ocurre acá:

  $$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

  Luego, las maneras en que puedo ordenar a 5 personas en 5 sillas en una fila corresponde a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ maneras.

  Así, notamos que la fórmula general, es decir, **el total de maneras en que se pueden ordenar n objetos en un fila** es:

  $$P(n) = n!$$

- **Permutación con Repetición**: Son las **permutaciones u órdenes que podemos hacer de un conjunto de elementos en los cuales algunos se repiten** o no son distinguibles. Una forma de entenderlo, relacionando el ejemplo anterior, es pensar en ¿qué pasaría si en vez de tener personas, se tienen letras, y algunas de estas se repiten? Pensemos que hay n letras, de las cuales hay k_1 de la primera, k_2 de la segunda, $\ldots$, k_n de la n-ésima.

Para comprender mejor, veamos el siguiente ejemplo:

Se tienen 3 monedas de \$50 y 7 monedas de \$100, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir entre 10 niñ@s, de modo que cada niñ@ tenga solo una moneda?

Notemos primero que las **monedas del mismo valor no las podemos distinguir** (obviemos el año que posee inscrito). Es decir que si al primer niñ@ le entrego una de \$50, no podremos distinguir cuál de todas las 3 monedas de \$50 posee. ¿Cómo tomaremos en cuenta eso a la hora de contar las permutaciones?

Primero, pensemos en el caso que sí son distinguibles, de tal manera que las permutaciones serían 10!, por lo visto anteriormente (ya que son en total 10 monedas).

Ahora, notamos que si al niño 1 le pasé una moneda de \$50 y al niño 3 le pasé otra moneda de \$50, al cambiarles la moneda entre ellos queda exactamente el mismo caso, pero al contar la permutación simple, **¡esta toma los casos como si fueran distintos!**, por lo tanto, **hay que sustraer los casos repetidos. ¡Esto se logra dividiendo por las mismas permutaciones de los elementos repetidos!** Si tenemos 3 monedas de \$50, las permutaciones son 3! y para las monedas de \$100, las permutaciones 7!, entonces el total de maneras de repartir las monedas es:

$$\frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Luego, en general se tiene que las maneras de ordenar n objetos, donde hay k_1 del primero, k_2 del segundo, $\ldots$, k_n del n-ésimo, es

$$P_{rep} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

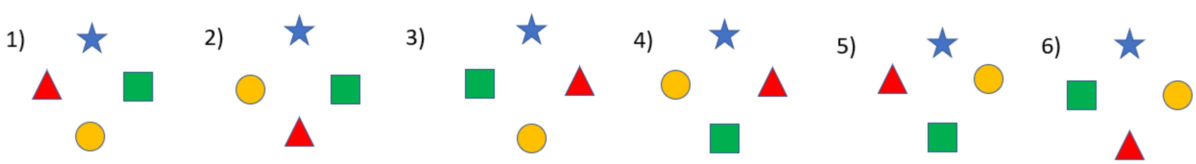
- **Permutación Circular**: Son las permutaciones que podemos hacer de un conjunto de elementos los cuales están **ordenados en círculo**, es decir, que **no tienen ni un inicio ni un final**. Una forma de entenderlo es pensar en un círculo de personas y ver cómo se saludan, fijando a uno:

$$P_{cir}(n) = (n-1)!$$

¿Por qué?

Por ejemplo, si tengo 4 elementos para ordenar linealmente la respuesta es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ formas, pero, **circularmente, ocurren casos en que el ordenamiento es el mismo**, por lo que hay que sustraerlos de alguna manera.

En la siguiente imagen se puede apreciar que las situaciones etiquetadas por las letras a, b, c y d son exactamente las mismas ya que son rotaciones en 90°, 180° y 270° de una situación inicial.



Si queremos ordenar 4 elementos circularmente, primero pensamos en las permutaciones lineales, las cuales son 4!, y después notamos que cada orden tiene 4 ordenes que son equivalentes (visto en la primera imagen). Por lo tanto, el número total de permutaciones circulares es

$$\frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Luego, tenemos 6 posibilidades de ordenarlas de forma diferentes, situación que se puede apreciar en la imagen superior.

Finalmente, se tiene que, en general, el número total de maneras de ordenar n objetos circularmente es:

$$P_{cir}(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Variaciones

La palabra fundamental en esta clasificación es **arreglos**: las **variaciones** son los **conjuntos que se pueden formar a partir de la característica de un elemento (o restricción)**, siendo **importante el orden** aquí también. Existen dos tipos:

- **Sin Repetición**: Siendo n la cantidad de elementos, queremos **obtener el número total de maneras de ordenar r elementos del total, sin repetir ninguno**, con $r \leq n$.

  Así, notamos que, en general, **la cantidad de maneras que se pueden ordenar n objetos en un fila de tamaño r**, con $r \leq n$, es:

  $$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  Para entender la fórmula, veamos el siguiente ejemplo:

  ¿De cuántas maneras puedo ordenar a 5 personas en una fila de 3 sillas?

  De la misma manera que fue explicado en las permutaciones lineales, podemos colocar a las personas en una línea:

  $$\_ \; \_ \; \_$$

  Sabiendo que se deben ordenar 5 personas, hay 5 posibilidades para la primera posición:

  $$\underline{5} \; \_ \; \_$$

  Teniendo una persona sentada, se tendrá que solo quedan 4 posibilidades para el segundo asiento:

  $$\underline{5} \; \underline{4} \; \_$$

  De la misma manera, se obtiene que para el tercer asiento, solo quedan 3 posibles personas:

  $$\underline{5} \; \underline{4} \; \underline{3}$$

  Nuevamente por el principio multiplicativo, se tendrá que el número de posibles combinaciones es:

  $$5 \cdot 4 \cdot 3$$

Podemos darnos cuenta que este resultado es similar al que fue obtenido en las Permutaciones Simples, sin embargo faltan algunos términos en la multiplicación. Esto se debe a la restricción impuesta de las 3 sillas limita el número de posibilidades. Luego, el número total es

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} &= \frac{5!}{2!} \\ &= \frac{5!}{(5-3)!} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que el número de posibles combinaciones de 5 personas con la restricción de 3 sillas estará dado por el arreglo sin repetición $V_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ maneras.

- **Con Repetición**: Siendo n la cantidad de elementos, queremos obtener de **cuántas maneras se pueden ordenar r elementos del total, con la posibilidad de repetirse**.

  Entonces, en general, **si se tienen n elementos, el total de maneras de ordenar r de ellos**, con $r \leq n$, considerando que **se pueden repetir** los números, es:

$$VR_r^n = n^r$$

  Para esto, veamos el siguiente ejemplo:

  ¿Cuántos posibles números de 3 cifras se pueden escribir con los números 1, 2, 3, 4 y 5, considerando que se pueden repetir?

  Análogo al caso anterior, formamos la fila de 3 elementos.

$$\_\ \_\ \_$$

  Luego, en el primer puesto, pueden ir 5 números:

$$\underline{5}\ \_\ \_$$

  Después, en el segundo puesto, notamos que también pueden ir 5 números, ya que en este caso **¡sí se pueden repetir!**

$$\underline{5}\ \underline{5}\ \_$$

  Finalmente, en el último puesto también pueden ir 5 por lo que queda que el total de números que se pueden hacer con 3 de estos 5 dígitos es:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$$

De esta forma, se tiene que podremos formar $VR_3^5 = 5^3 = 125$ números de 3 cifras con los números 1, 2, 3, 4 y 5.

Nota: **¡Tener mucho cuidado si una de las cifras es el dígito 0!** Ya que en este caso, la primera posición no puede ser ocupada por el 0 cuando hablamos de números.

Combinaciones

La palabra fundamental en esta clasificación es **combinaciones** (valga la redundancia): las **combinaciones** son los diferentes **conjuntos de elementos que se pueden formar a partir de la característica de un elemento**, **no siendo importante el orden**. Para entender, veamos el siguiente ejemplo:

¿De cuántas maneras puedo elegir 3 personas de un total de 5 personas?

Notamos que **da lo mismo el orden en el que las elija**, por lo tanto, estamos hablando de combinaciones.

Procedemos como antes: si el orden importara, aplicamos la fórmula de variación, la cual da que las maneras de elegir 3 personas entre 5, tomando en cuenta el orden es:

$$\frac{5!}{(5-3)!}$$

y **como cada conjunto de 3 personas, tiene 3! maneras de ordenarse distinto, dividimos por 3! para sustraer todos esos casos equivalentes**. Por lo tanto, la cantidad de maneras que se pueden elegir 3 personas entre 5 es:

$$\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}$$

Así, en general, la cantidad de maneras que puedo elegir r objetos de un total de n objetos es:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

Se debe tener **mucho cuidado diferenciando variación y combinación**: por ejemplo, si queremos saber cuántos números de tres cifras podemos formar con los dígitos del 1 al 9, debemos usar variación, ya que es importante el orden en que están escritos los dígitos, así 321 es distinto de 123 y de sus otras cuatro permutaciones. Si usamos combinatoria, entonces todos los elementos 321, 123, 213, etc. serían considerados como el mismo.

Ejemplo resuelto: Si se desea formar un directiva de curso compuesta de 2 hombres y 2 mujeres en un curso pequeño compuesto de 4 mujeres y 3 hombres. ¿De cuántas maneras se puede formar la directiva?

Solución: Como son cifras pequeñas, podemos contar de manera simple. Si llamamos A, B, C y D a las mujeres y X, Y y Z a los hombres, las posibles directivas son:

ABXY	ABXZ	ABYZ
ACXY	ACXZ	ACYZ
ADXY	ADXZ	ADYZ
BCXY	BCXZ	BCYZ
BDXY	BDXZ	BDYZ
CDXY	CDXZ	CDYZ

Son 18 las posibles directivas. Este número se obtiene al elegir 2 mujeres de un total de 4:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 6$$

Al hacer el mismo procedimiento con los hombres

$$C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3\cdot 2!}{2!} = 3$$

por el principio multiplicativo $6 \cdot 3 = 18$

Ahora podemos resolver el ejercicio propuesto al inicio de esta guía: imaginemos un curso de 30 estudiantes compuesto de 16 mujeres y 14 hombres: ¿de cuántas maneras se puede formar una directiva de curso de 4 integrantes que cumpla la paridad?

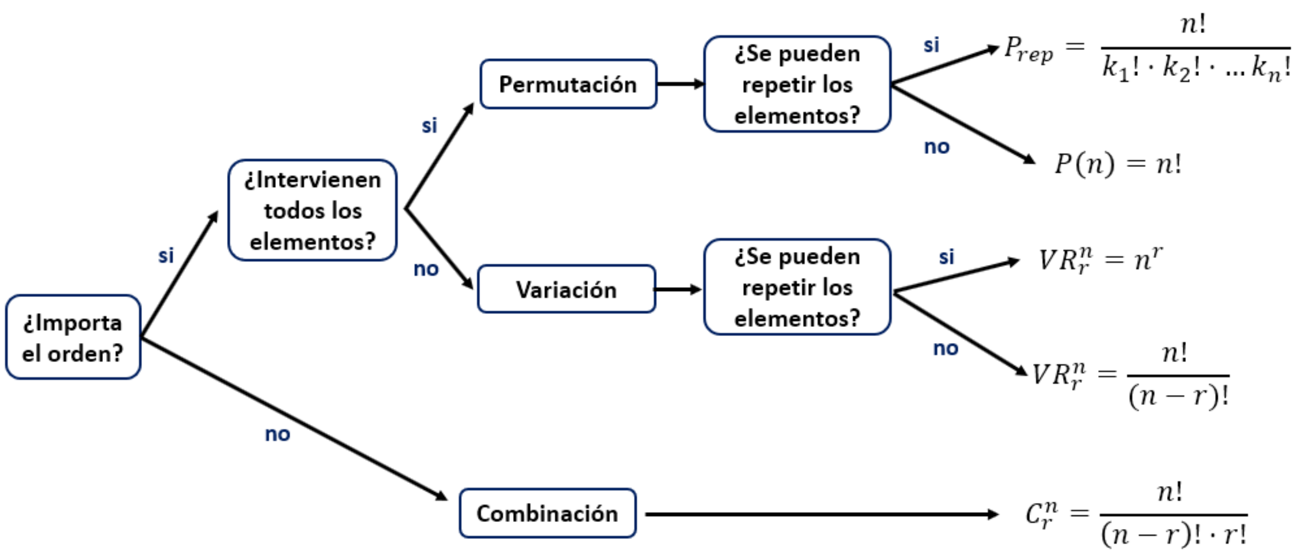
Debemos calcular C_2^{16} (un grupo de 2 mujeres de un total de 16) y C_2^{14} (un grupo de 2 hombres de un total de 14).

$$C_2^{16} = \frac{16!}{(16-2)!\,2!} = \frac{16!}{14!\,2!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14!}{14!\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 15 = 120$$

$$C_2^{14} = \frac{14!}{(14-2)!\,2!} = \frac{14!}{12!\,2!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12!}{12!\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 13 = 91$$

Tenemos un total de $120 \cdot 91$=10.920 combinaciones.

Por lo tanto, es posible de reagrupar y clasificar las técnicas de conteo recién explicadas en el siguiente diagrama:



Ejemplo resuelto: ¿Cuántos números de 3 cifras con 0, 1, 2, 3 y 4 se pueden formar?

a) Sin repetición.
b) Con repetición.
c) Cuántos son impares.
d) Cuántos son pares.

¿Cual de las formulas anteriores usarías?

Si te fijas, no podemos aplicar ninguna directamente. Este tipo de problemas son muy comunes y más que una formula, necesitamos entender el trasfondo para poder resolverlo.

Solución:

Un número de 3 cifras no puede tener el cero como primer dígito ya que tendría dos cifras. Ejemplo: 013 es 13.

a) Sin repetición: El primer casillero lo podemos llenar de 4 maneras (con 1, 2, 3 o 4) pues el cero no debe estar, el segundo de 4 maneras ya que el cero puede estar y el tercero de 3 maneras. Esto ocurre ya que si ocupé un número en una cifra, no lo puedo ocupar en los siguientes ya que es sin repetición.

4	4	3

Aplicando el principio de la multiplicación se obtiene $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ maneras.

b) Con repetición: El primer casillero lo podemos llenar de 4 maneras pues el cero no debe estar, el segundo de 5 maneras ya que el cero puede estar y el tercero tambien de 5 maneras. Recordemos que son 5 elementos que si se pueden repetir.

4	5	5

Aplicando el principio de la multiplicación se obtiene $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ maneras.

c) Números impares: Sabemos que son 48 números sin repetición los que se pueden formar de los cuales son números pares e impares, entonces:

$$\text{Pares} + \text{Impares} = 48$$

Dejando un número impar en la última cifra nos queda ordenar los 4 números restantes en dos casilleros:

No cero	Par o impar	Impar

la forma de ordenar 4 elementos en 2 casilleros es:

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 12$$

pero debemos restar los números que tienen cero en la primera cifra. Nos quedan 5 - 2 (el cero y un impar)= 3 elementos ordenar en el primer casillero:

$$P_1^3 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

Entonces:

$$P_2^4 - P_1^3 = 12 - 3 = 9$$

y como hay dos posibilidades de número impar: el 1 y 3, basta con multiplicar por dos el resultado anterior, entonces hay **18 números impares**.

d) Números pares: Encontramos que hay 18 números impares y sabiamos que:

$$\text{Pares} + \text{Impares} = 48$$

implica que los números **pares son 30**.

Ejercicios Propuestos

1. Si $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = 156$, entonces $n =$

   a) 5
   b) 10
   c) 20
   d) 30
   e) 40

2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar cuatro libros de física, tres de química y cinco de matemática en un estante lineal, si los libros de cada asignatura deben estar siempre juntos?

   a) $12!$
   b) $4! \cdot 3! \cdot 5!$
   c) $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$
   d) $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3$
   e) $4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3!$

3. Con las letras A, B, C, D, E, F y G, se desean formar códigos de 3 letras. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

   (i) Se pueden formar 210 códigos diferentes, sin que se repitan letras.

   (ii) Se pueden formar 343 códigos diferentes, pudiendo repetir letras.

   (iii) Se pueden formar 5 códigos diferentes, que comiencen con A y terminen en E y se puedan repetir las letras.

   a) Solo I
   b) Solo I y II
   c) Solo I y III
   d) Solo II y III
   e) I, II y III

4. Se tienen que repartir 2 premios entre 10 alumnos. Si ambos premios no pueden ser concedidos a un mismo alumno, ¿de cuántas maneras se pueden repartir?

   a) 20
   b) 30
   c) 45
   d) 90
   e) 180

Figura 1: Andrea Ghez

Científica Destacada: Andrea Ghez

Es la cuarta mujer de la historia en ganar el Premio Nobel de Física. Andrea Ghez es una astrofísica estadounidense, y su equipo tomó la primera imagen de un agujero negro.

Primero quiso ser bailarina, también pensó en ser astronauta, aunque durante el colegio su profesora de química la inspiró a especializarse en física. Su madre siempre la apoyó. Recibió la Licenciatura en Física en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en 1987 y su Doctorado en el Instituto de Tecnología de California (CALTECH) en 1992.

En 2004 fue elegida para la Academia Nacional de Ciencias y la revista de divulgación científica Discover la incluyó en la lista de los 20 científicos y científicas de EE.UU.

Desarrolló técnicas de imágenes de alta resolución espacial para examinar el agujero negro manifestado en el centro de nuestra galaxia. Pese a lo difícil de la misión, produjo imágenes que tienen la resolución espacial más alta que se puede obtener desde el suelo o el espacio.

La posibilidad de un agujero negro en el centro de la Vía Láctea se discutió durante las últimas décadas. Andrea y sus compañeros, el alemán Reinhard Genzel y el británico Roger Penrose, fueron capaces de probar la hipótesis.

Andrea se ha convertido en la cuarta mujer en la historia merecedora del Premio Nobel de Física, entregado en 2020, *por el descubrimiento de un objeto compacto supermasivo en el centro de nuestra galaxia.*