

Autores: Bernardita Ried y Pablo Paredes Haz

Año: 2020

Contacto: preuencuarentena@gmail.com

Guía nº5: Potencias

Eje temático: Números

DEMRE

- Extensión de las propiedades de potencias al caso de base racional y exponente entero, y aplicación de ellas en diferentes contextos.
- Resolución de problemas en contextos diversos que involucran potencias de base racional y exponente entero, enfatizando el análisis crítico de los procedimientos de resolución y de los resultados obtenidos.

1. Potencias de Exponente Entero

1.1. Definición

Cuando hablamos de potencias, nos referimos a la multiplicación reiterada de una base (a) indicada por su exponente (n). En esta guía solo veremos casos donde $n \in \mathbb{Z}$. La notación para referirnos a una potencia es: $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$ y se lee " a elevado a la potencia n ", aunque también se le dice " a a la n ".

En particular, si el exponente es 2, se dice que el número está al *cuadrado*, mientras que si el exponente es 3, se le dice que el número está al *cubo*.

1.2. Propiedades Generales

Considerando a y b como números racionales, con $a \neq 0, b \neq 0, m$ y n números enteros definimos:

1.2.1. Definiciones

- Exponente nulo:

$$a^0 = 1$$

- Exponente -1:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

- Potencia de una potencia:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

1.2.2. Igual Base

- Multiplicación:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- División:

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

1.2.3. Distinta Base, pero igual exponente

- Multiplicación:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- División:

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

1.2.4. Implicancias directas de las definiciones anteriores

- Exponente igual a 1:

$$a^1 = a$$

- Base igual a 1:

$$1^n = 1$$

- Exponente negativo genérico:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

- Base -1:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación: 0^0 no está definido.

Podemos notar que de estas propiedades surge la necesidad de establecer algunas de las definiciones previamente dadas. Por ejemplo,

- $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$
- $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$
- $0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$, lo cual no está definido

Notemos que si $a^n = b^n$, entonces $|a| = |b|$. Por otro lado, si $a^n = a^m$, entonces $n = m$.

Ejercicio: ¿Cuál de los siguientes números es mayor? $2^{70}, 7^{30}, 13^{20}$

En este ejercicio, vamos a usar la propiedad de "potencia de una potencia", pero a la inversa, es decir, vamos a separar el exponente hasta llegar a un exponente común y después hacer una comparación entre los números:

$$\begin{aligned} 2^{70} &= 2^{7 \cdot 10} = (2^7)^{10} = 128^{10} \\ 7^{30} &= 7^{3 \cdot 10} = (7^3)^{10} = 343^{10} \\ 13^{20} &= 13^{2 \cdot 10} = (13^2)^{10} = 169^{10} \end{aligned}$$

por lo que se ve que 7^{30} es, claramente, mayor que los otros dos números.

Es muy importante saberse las propiedades, pero también es clave saber cuándo ocuparlas, ya que en este caso hubo que ser un poco más creativo, pues no era claro como proceder o empezar.

2. Tabla Resumen

Propiedad	Ejemplo
$a^0 = 1$	$3^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$1^n = 1$	$1^6 = 1$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$7^{-1} = \frac{1}{7}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$4^5 \cdot 5^5 = (4 \cdot 5)^5 = 20^5$
$a^n : b^n = (a : b)^n$	$12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3$
$(-1)^n = 1$ si n es par.	$(-1)^4 = 1$
$(-1)^n = -1$ si n es impar.	$(-1)^5 = -1$

3. Notación Científica

Se utiliza para abreviar números muy grandes o muy pequeños, dejándolos en una expresión de un número real entre 1 y 10 (sin contar el 10), por una potencia de 10.

Ejemplos:

- 0,0000000000015 escrito en notación científica sería: $1,5 \cdot 10^{-11}$
- 6300000000 escrito en notación científica sería $6,3 \cdot 10^9$

Se utilizan mucho en ciencia, para abreviar números.

Ejercicio: Escribe 42000 y 0,091 en notación científica.

3.1. Operatoria con Notación Científica

Para poder sumar o restar números en notación científica debemos hacer que las potencias de 10 sean iguales y sumar o restar respectivamente.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 1,54 \cdot 10^3 + 8,4 \cdot 10^2 &= (15,4 + 8,4) \cdot 10^2 \\ &= 23,8 \cdot 10^2 \\ &= 2,38 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula la siguiente expresión: $6,43 \cdot 10^2 - 5,13 \cdot 10^4$

Para poder multiplicar o dividir números en notación científica debemos multiplicar los números y las bases de forma separada, respetando las propiedades de las potencias. Finalmente se debe verificar si el resultado está en notación científica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (8,4 \cdot 10^3) \cdot (2,1 \cdot 10^{-5}) &= (8,4 \cdot 2,1) \cdot (10^3 \cdot 10^{-5}) \\ &= 17,65 \cdot 10^{3-5} \\ &= 17,65 \cdot 10^{-2} \\ &= 1,765 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula la siguiente expresión: $(5,1 \cdot 10^3) : (1,7 \cdot 10^{-5})$

3.2. Tabla de Potencias de Base Diez

Potencia de Base 10	Resultado
$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10,000} = 0,0001$
$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{1,000} = 0,001$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{100} = 0,01$
$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10} = 0,1$
10^0	1
10^1	10
10^2	100
10^3	1.000
10^4	10.000

3.3. Prefijos

Para simplificar la notación, en muchos casos se usan prefijos para describir que un número está multiplicado por cierta potencia de diez. Por ejemplo, el prefijo *kilo* representa multiplicar por 10^3 . Así, 30 km (*kilo-metros*) son $30 \cdot 10^3$ m (metros).

Dejamos una tabla de los prefijos que hay que saberse y que se van a usar en la prueba:

Prefijo	Símbolo	Potencia
Kilo	k	10^3
Deca	da	10^1
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}

Existen más prefijos que hablan de cantidad mucho mayores o menores. Por ejemplo, el prefijo *Tera*, usado para memoria computacional, representa 10^{12} . También, está el prefijo *Nano*, usado en biología celular, para describir tamaños de organelos, representa 10^{-9} .

4. Interés

Un problema clásico es el de interés. Por ejemplo, una persona puede depositar dinero en un banco con una tasa de interés mensual (generalmente, calculada en %, esto significará que cada mes, el dinero depositado aumentará según la tasa del banco.

Veamos los dos tipos de intereses que existen:

4.1. Interés Simple

En este caso, la tasa de interés se aplica solamente sobre el capital inicial, y en cada período de la operación (puede ser diario, mensual, semestral, anual, etc), se suma el mismo interés sobre el capital.

Entonces, si una persona deposita C_I (capital inicial), en un banco con tasa de interés simple mensual de 1 %, al cabo del primer mes su capital final C_F sería:

$$C_F = C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I = C_I \left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

luego, al cabo del n -ésimo mes, el capital final es:

$$C_F = C_I + \underbrace{\frac{1}{100} \cdot C_I + \dots + \frac{1}{100} \cdot C_I}_{n \text{ veces}} = C_I \left(1 + \frac{1}{100} \cdot n\right)$$

por lo que, en el caso general, donde la tasa de interés es i %, se tiene que la fórmula para calcular el capital final C_F luego de n períodos de tiempo, con capital inicial C_I es:

$$C_F = C_I \left(1 + \frac{i}{100} \cdot n\right)$$

Notamos también, que si sabemos 3 de las 4 variables, es posible calcular la que falta. Por ejemplo, si nos preguntan cuánto tengo que depositar en un banco con 1 % de interés semestral, para que en 2 años tenga \$5.200, se debe notar que lo que se busca es el capital inicial, ya que: $C_F = \$5,200$, $i = 1$ y $n = 4$, ya que se reajusta semestralmente, por lo que en 2 años se reajustaría 4 veces en total. Por ende:

$$\$5,200 = C_I \left(1 + \frac{1}{100} \cdot 4\right)$$

Luego, despejando se obtiene: $C_I = \$5,000$

4.2. Interés Compuesto

En este otro caso, la tasa de interés no solo se aplica sobre el capital inicial, sino que se va aplicando al capital actual. Es decir, si una persona deposita C_I a un banco con interés compuesto mensual de 1 %, al cabo de 1 mes, el capital final C_F es:

$$C_F = C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I = C_I \left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

Notamos que en la primera operación, nada cambia con el interés simple, pero veamos qué pasa al cabo del segundo mes:

$$\begin{aligned}
 C_F &= C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I + \frac{1}{100} \underbrace{\left(C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I \right)}_{\text{capital al cabo de 1 mes}} \\
 &= C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{100} \left(C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right) \right) \\
 &= C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right) \left(1 + \frac{1}{100} \right) \\
 &= C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right)^2
 \end{aligned}$$

Finalmente, se puede concluir que, para el caso general, donde el capital inicial es C_I , la tasa de interés compuesto es $i\%$ y el número de períodos de tiempo donde el interés actúa es n , la fórmula para calcular el capital final C_F es:

$$C_F = C_I \left(1 + \frac{i}{100} \right)^n \quad (1)$$

Con C_F : Capital Final, C_I : Capital Inicial, i : interés y n : número de veces.

Por ejemplo, nos preguntan cuánto dinero se tendrá luego de 1 año si se invierten \$2.000 en un seguro con reajuste del 10% de interés compuesto trimestral. En este caso, se busca el Capital Final, y se tiene que $C_I = \$2,000$, $i = 10$ y $n = 4$ (ya que se reajusta trimestralmente, por lo que en 1 año se reajusta 4 veces en total). Luego:

$$C_F = 2,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100} \right)^4$$

Finalmente, despejando se obtiene: $C_F = \$2,928$

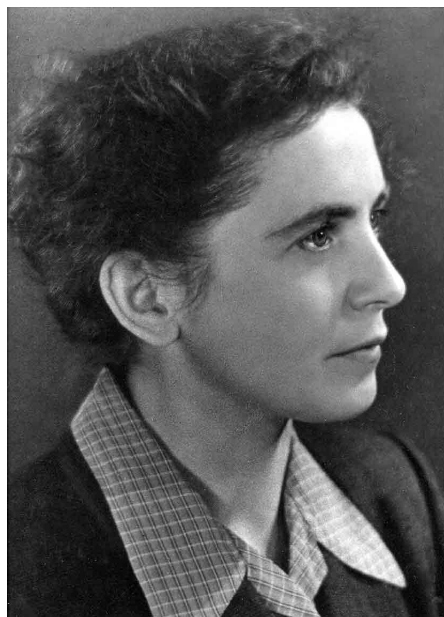


Figura 1: Olga Ladyzhenskaya

5. Científica Destacada: Olga Ladyzhenskaya

Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya nació el 7 de marzo de 1922 en la ciudad rural rusa de Kologriv y murió el 12 de enero de 2004 en San Petersburgo a la edad de 81 años. En una vida dedicada a las matemáticas, evitó la tragedia personal debida a los sucesos cataclísmicos a los que se vió sometida Rusia, convirtiéndose en una de las matemáticas líderes del país.

Su padre había enseñado matemáticas en la escuela superior y fue él el que introdujo a Olga, a temprana edad, en las matemáticas y el cálculo. En 1937, su padre fue arrestado, para después ser asesinado por la NKVD, la antecesora de la KGB. La vida se volvió extremadamente difícil para su familia, viviendo en la desgracia y la pobreza como familia de un "enemigo". En 1939, pasó los exámenes de ingreso en la Universidad de Leningrado, sin embargo se le negó entrar, pues, aunque, era excepcionalmente dotada, su padre había sido un "traidor". Con ayuda de amigos, en 1943, Olga finalmente entró como estudiante en la Universidad Estatal de Moscú, graduándose en 1947.

Su tesis doctoral, defendida en 1949, fue un punto de inflexión en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales y, más tarde, con sus desarrollos sobre soluciones débiles para problemas con valores iniciales en la frontera, fueron, asimismo, importantes en Física Matemática.

Sus logros matemáticos fueron reconocidos en muchos países. Ladyzhenskaya hizo contribuciones profundas en todo el espectro de las ecuaciones en derivadas parciales y trabajó en temas que iban desde la unicidad de soluciones hasta la convergencia de series de Fourier y aproximaciones en diferencias finitas de soluciones. Desarrollando ideas de De Giorgi y Nash, Ladyzhenskaya y sus colaboradores dieron una solución completa al problema 19 de Hilbert. Publicó más de 250 artículos y fue coautora de siete monografías y libros de texto.