Traslación, Reflexión y Composición de Funciones

Eje temático: Álgebra y Funciones

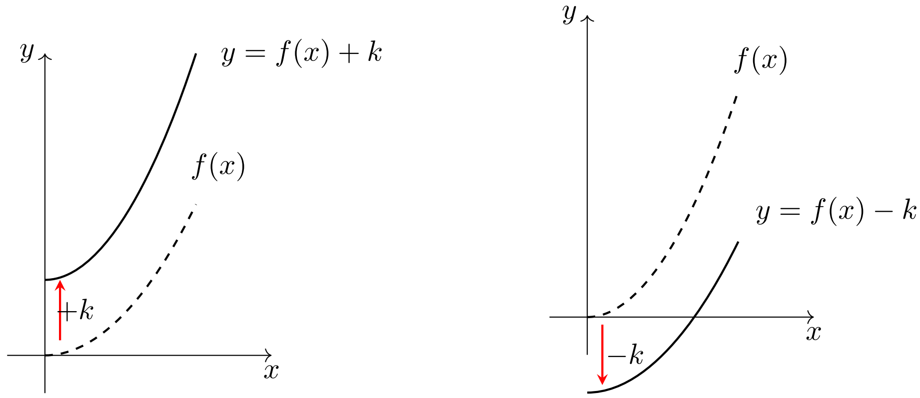
Traslación de Funciones

Las funciones tienen la capacidad de ser **desplazadas en el plano carteasiano**. Estas mantienen su forma original y tamaño. Veremos hoy cómo relacionar su gráfica y la representación algebraica cuando se desplaza de manera vertical como horizontal.

Traslación Vertical

Sea $y = f(x)$ una función cualquiera. Si consideramos a k constante positiva, tal que $k > 0$.

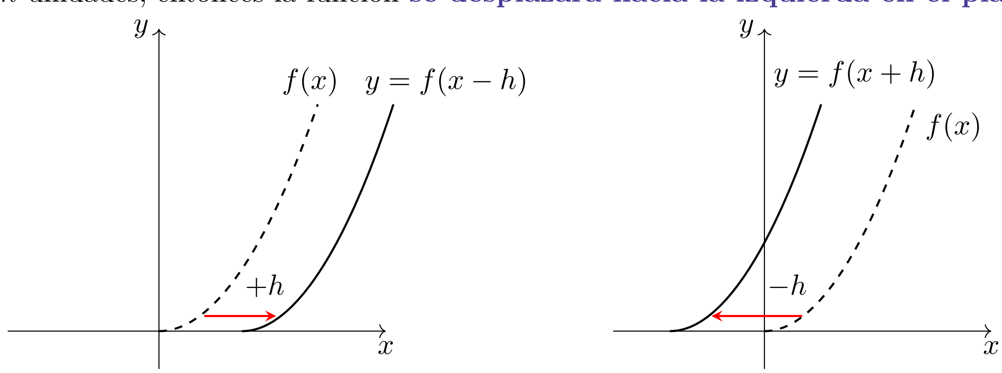
Si la constante k se **suma a las imágenes**: $f(x) + k$, es decir, consideramos una nueva función tal que $y = f(x) + k$ notamos que todos los valores de la función original aumentan en las mismas k unidades, entonces la función se **desplazará hacia arriba en el plano**:



En el caso de **restarle la constante a las imágenes** (o de haber considerado k negativo), es decir, tomar $y = f(x) - k$, obtendremos que la función **se desplaza hacia abajo en el plano**.

Traslación Horizontal

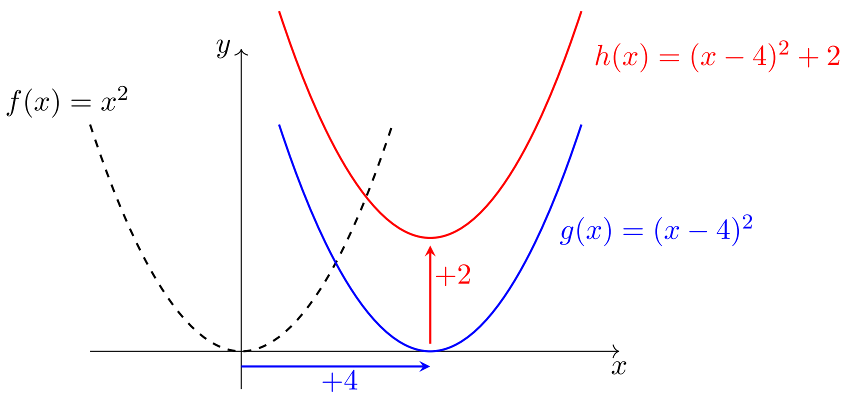
Ahora, consideramos h constante positiva. Si h se **suma a las pre-imágenes**, es decir, tomamos una nueva función $y = f(x+h)$, de tal manera que todos los valores dentro del paréntesis aumenten en h unidades, entonces la función **se desplazará hacia la izquierda en el plano**:



Asimismo, **si le restamos la constante a las pre-imágenes**: $f(x - h)$, entonces la función se **desplaza hacia la derecha en el plano**.

Entonces, a modo de resumen, si sumamos un número fuera del paréntesis $f(x)+k$, la función se trasladará verticalmente, donde esta se trasladará hacia arriba si $k>0$, y hacia abajo si $k<0$. Por otro lado, si sumamos un número dentro del paréntesis $f(x+h)$, la función se trasladará horizontalmente, donde la traslación será hacia la izquierda si $h>0$, y hacia la derecha si $h<0$.

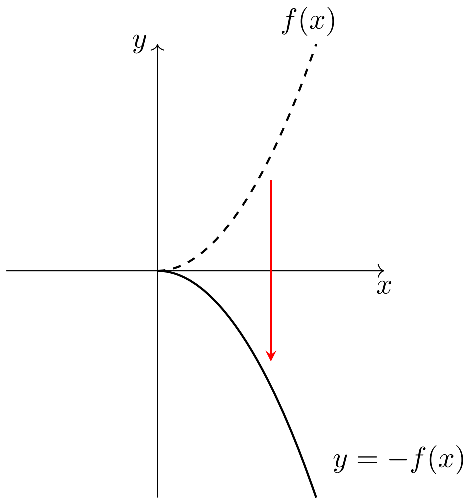
Por ejemplo, si queremos trasladar la función $f(x)=x^2$, 2 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la derecha, **podemos hacer primero la traslación horizontal y después la vertical**. Entonces, para la horizontal, notamos que es 4 unidades hacia la derecha, entonces, tenemos que restar 4 a las preimágenes, entonces, la función trasladada será una nueva función $g(x)=f(x-4)=(x-4)^2$. Ahora, a esta nueva función, tendremos que aplicarle una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba, o sea, hay que sumarle 2 fuera del paréntesis y obtendremos una nueva función $h(x)=g(x)+2=(x-4)^2+2$, donde h es la función f trasladada como deseábamos.



Simetría de Funciones

Reflexión con respecto al eje X

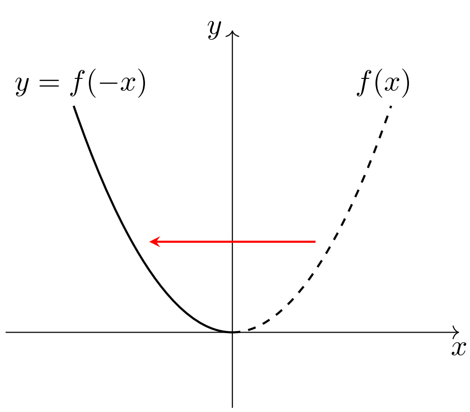
Sea $y = f(x)$ una función cualquiera. Si **anteponemos un signo negativo a la imagen**: $y = -f(x)$, se tendrá que todas **las imágenes serán su opuesto**, lo que equivale a hacer una **reflexión en el eje horizontal del plano**, tal como se puede ver en la imagen.



Notemos que si una función es simétrica con respecto al eje X quiere decir que $f(x) = -f(x)$, lo que implica que si sumamos a ambos lados $f(x)$, se tendrá que $2f(x) = 0 \longleftarrow f(x) = 0$. Es decir, **la única función simétrica con respecto al eje X es la función** $f(x) = 0$

Reflexión con respecto al eje Y

Si anteponemos un **signo negativo dentro del dominio**: $y = f(-x)$, se tendrá que todas las pre-imágenes serán su opuesto, lo que equivaldría a hacer una **reflexión en el eje vertical del plano**.



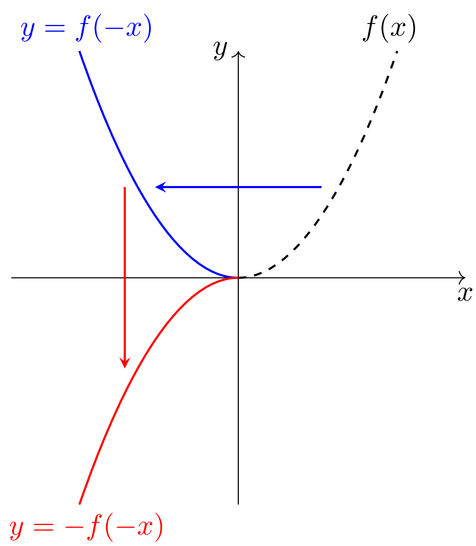
En particular, si se cumple que $f(x) = f(-x)$, decimos que la función es **simétrica con respecto al eje Y**. También se le conoce como **función par**.

Un clásico ejemplo es la función cuadrática: $f(x) = x^2$, ya que:

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = f(x)$$

Reflexión central con respecto al origen

Si deseamos **reflejar una función $f(x)$ con respecto al origen**, la función que se obtendrá es $y = -f(-x)$, lo cual también se obtiene si hacemos una reflexión con el eje X, seguida de una reflexión con el eje Y.



En particular, si $f(x) = -f(-x)$, es decir, la función tiene **simetría central con respecto al origen**, y a este tipo de funciones se les conoce como **función impar**.

Un clásico ejemplo es la función cúbica: $f(x) = x^3$, ya que:

$$-f(-x) = -(-x)^3 = -((-1)^3 \cdot x^3) = -(-x^3) = x^3 = f(x)$$

OJO: Una función, perfectamente, **puede no ser par ni impar**, como por ejemplo la función $f(x) = x - 2$, ya que:

$$f(-x) = -x - 2 \neq f(x)$$

Y también

$$-f(-x) = x + 2 \neq f(x)$$

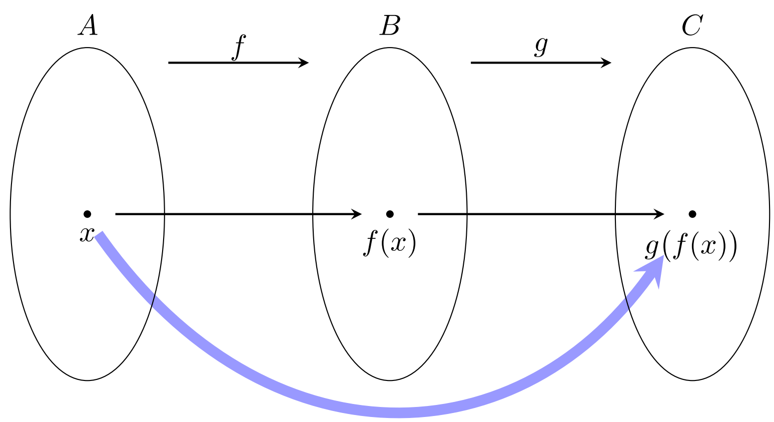
Composición de Funciones

Sean dos funciones, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, en que el recorrido de f está contenido en el dominio de g.

Se define la **composición** de f y g como:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) : A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) = y\end{aligned}$$

En otras palabras, aplicamos la función f en un valor x. Luego, a la imagen $f(x)$ se le aplica la función g, o sea, $g(f(x))$.



OJO: No necesariamente $f(g(x)) = g(f(x))$.

Veamos dos ejemplos:

- $f(x) = \sqrt{x} - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = x^3$ y $g(x) = \frac{1}{x}$

Vemos que en el primer caso $f(g(x)) \neq g(f(x))$, ya que:

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{x}} - 3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(\sqrt{x}-3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}
$$

Donde claramente $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

En el segundo caso $f(g(x)) = g(f(x))$, ya que:

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \\
&= \frac{1}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(x^3) \\
&= \frac{1}{x^3}
\end{aligned}
$$

Queda demostrado que en el segundo caso $f(g(x)) = g(f(x))$.

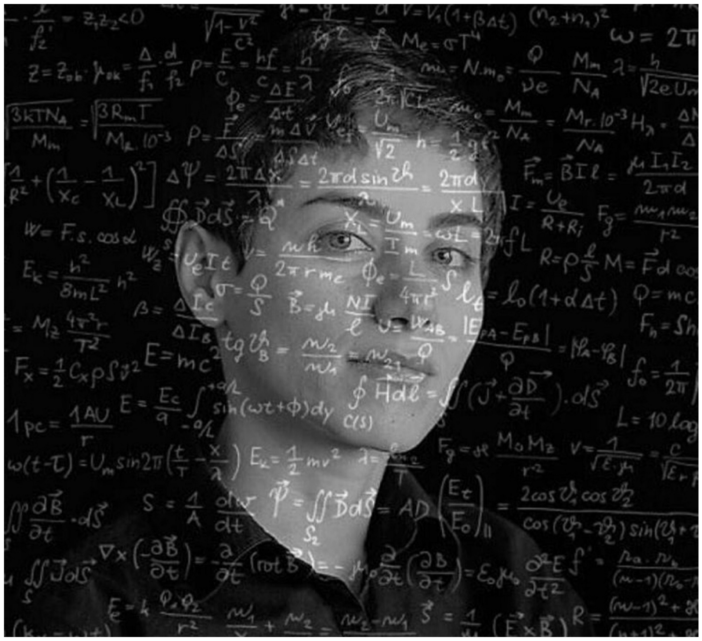


Figura 1: Maryam Mirzajani

Científica Destacada: Maryam Mirzajani

Maryam Mirzajaní (12 de mayo de 1977, 14 de julio de 2017) fue una matemática iraní y profesora de matemáticas en la Universidad de Stanford. En 2014 fue galardonada con la Medalla Fields, siendo la primera mujer en recibir este premio equivalente al Nobel de las matemáticas.

Se graduó en Matemáticas en 1999 en la Universidad de Tecnología Sharif de Teherán. En 2004 se doctoró en la Universidad de Harvard. Desarrolló su carrera en los campos del espacio de Teichmüller, la geometría hiperbólica, la teoría ergódica y la geometría simpléctica.

Fue investigadora en la Universidad de Stanford (EE. UU.). Sus estudios abarcan impactantes y originales investigaciones sobre geometría y sistemas dinámicos. Su trabajo en superficies de Riemann y sus modelos espaciales conectan varias disciplinas matemáticas (Geometría hiperbólica, análisis complejo, topología y dinámica) e influyen en todas ellas. Profesora de matemáticas en la Universidad de Stanford desde septiembre de 2008 hasta su fallecimiento.

Mirzajani fue diagnosticada con cáncer de mama en 2013. Murió el 15 de julio de 2017.