Modelos Lineales

Eje temático: Álgebra y Funciones

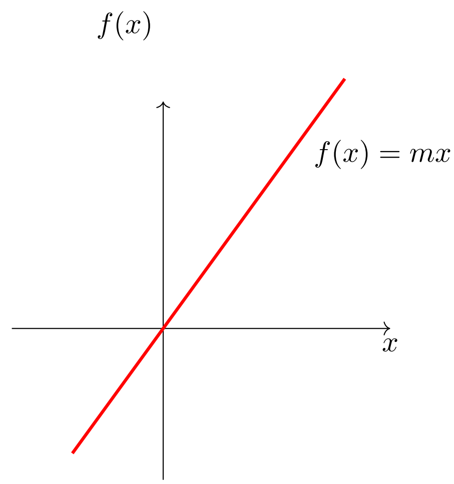
Modelos Lineales

Definición

Los modelos lineales son funciones que se grafican como rectas en el plano cartesiano, existen tres tipos de funciones de este tipo:

1) Función Lineal

Se denomina **función lineal** a la función definida por $f(x) = mx$, con m un número real denotado comúnmente como **pendiente**.



Las funciones lineales aparecen cuando la **variable dependiente es directamente proporcional a la variable independiente**.

Tomemos el caso del **perímetro de un cuadrado**, el cual lo queremos **relacionar con su lado**. Sabemos que si el lado de un cuadrado es a, entonces su perímetro es $4a$. Entonces, si llamamos P al perímetro del cuadrado, podemos hacer la función $P(a) = 4a$, donde $P(a)$ será el perímetro del cuadrado en función de a, con a el lado del cuadrado. **Así, podremos ingresar a la función el lado de un cuadrado y esta nos retornará su perímetro**. Notamos que $P(a) = 4a$ es una función lineal con pendiente 4, por lo tanto, podemos decir que el perímetro de un cuadrado **depende linealmente** de su lado.

Por otro lado, tenemos que el **área de un cuadrado no depende linealmente de su lado**, pues si A es el área y a su lado, tenemos que $A(a) = a^2$, lo cual no es una función lineal, pues la variable independiente está elevada a 2.

Existen múltiples ejemplos de relaciones lineales:

- La **longitud de la circunferencia como función del radio**: $P = 2\pi r$, en este caso r denota la variable independiente, P la dependiente, ya que $P = P(r)$, y la pendiente sería 2π.

- El **perímetro de un triángulo equilátero en función de su lado**: $P = 3a$, en este caso el lado a denota la variable independiente, P la dependiente, ya que $P = P(a)$, y la pendiente sería 3.

- La **fuerza de un resorte es directamente proporcional al estiramiento o compresión**: $F = k \cdot x$, en este caso el estiramiento x denota la variable independiente, F la dependiente, ya que $F = F(x)$, y k, la constante elástica, la pendiente.

- ¿Se te ocurre otra?

Propiedades:

- Las **dos propiedades fundamentales** que cumplen las funciones lineales son las siguientes:

  1. $f(a+b) = f(a) + f(b), \quad$ para cualquier a, b en el dominio de f.
  2. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x), \quad$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y x en el dominio de f.

  Veamos la demostración: Sea $f(x) = mx$ una función lineal cualquiera, con $m \in \mathbb{R}$. Se tendrá entonces que:

  1. $f(a+b) = m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b = f(a) + f(b)$
  2. $f(\lambda \cdot x) = m \cdot \lambda \cdot x = \lambda \cdot (m \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

- Notamos que $f(0) = m \cdot 0 = 0$, es decir, las **funciones lineales siempre pasan por el origen** $(0, 0)$.

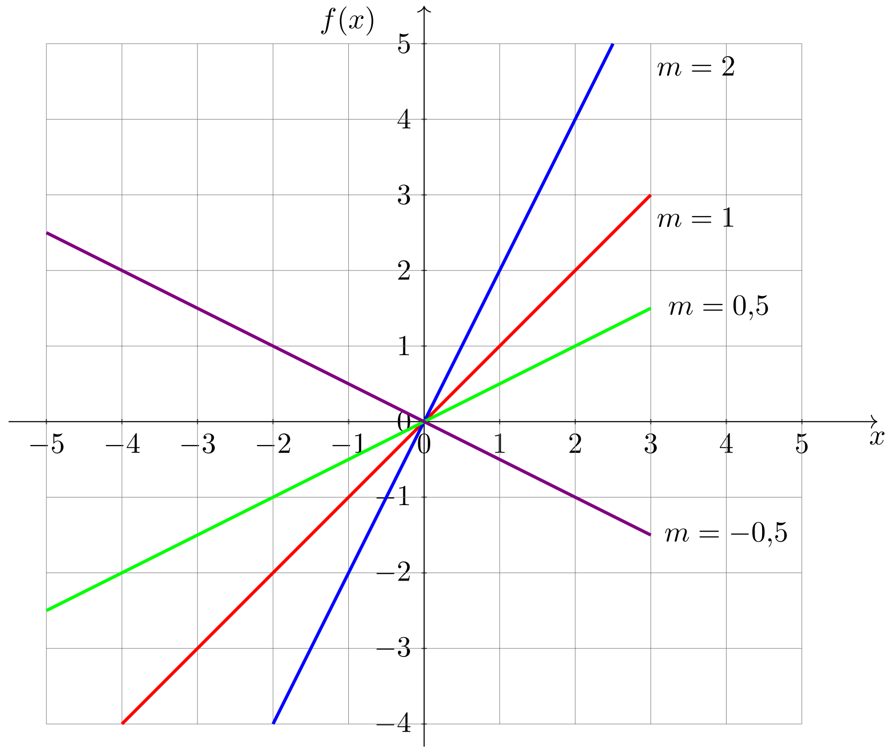
- Como verás, **en el dominio de la función se podría tener cualquier número real**, ya que no hay restricciones. Esto implica que muchas veces se escriba:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = mx \end{aligned}$$

  En otras palabras, podemos tomar $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $CoDom(f) = \mathbb{R}$.

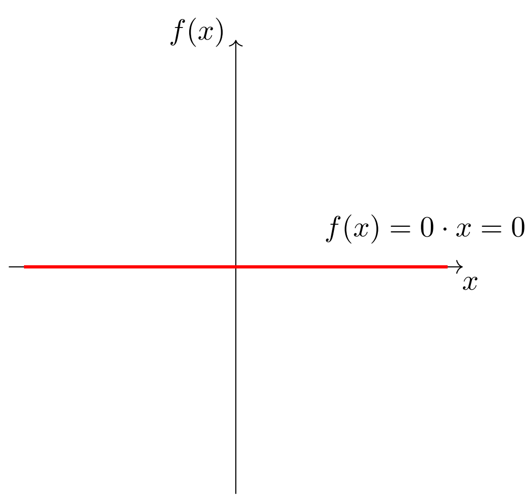
- Cuando $f(x) = mx$, con $m \neq 0$, tendremos que $CoDom(f) = Rec(f) = \mathbb{R}$. Notamos que si $m = 0$, $Rec(f) = \{0\}$.

A modo de ejemplo, en el siguiente gráfico se dibujan cuatro funciones lineales $f(x) = mx$ con distintas pendientes.

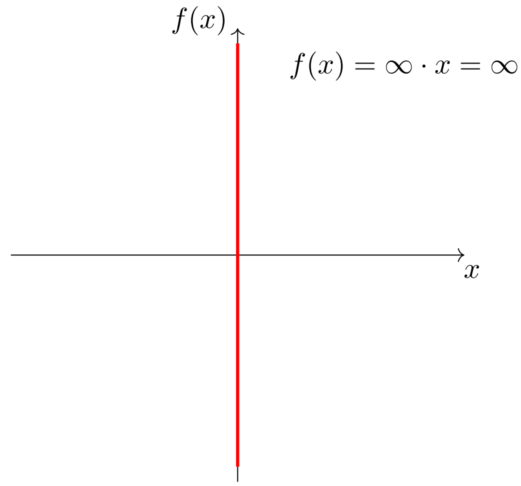


Observamos que la pendiente es un parámetro muy importante ya que nos dice la inclinación que posee una recta en el plano cartesiano. Las rectas de funciones lineales con **pendiente positiva se encuentran en los cuadrantes I y III** y notamos que es una función **creciente**. Mientras que las de **pendiente negativa se encuentran en los cuadrantes II y IV**, y estas son **decrecientes**. En muchos problemas se estudia la pendiente como la tasa de cambio de la variable y con respecto a la variable x. Más adelante veremos una fórmula para determinar este valor, en particular, lo estudiaremos cuando veamos ecuación de la recta (materia que es de Geometría).

Veamos dos casos particulares: Las rectas con **pendiente cero son horizontales** como el eje x, como en la imagen que vemos a continuación, donde siempre el recorrido será 0:

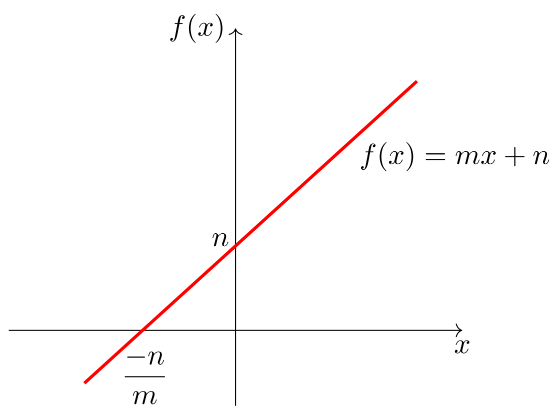


Por otro lado, hay otro caso extremo, que incluso **deja de ser función**, y es cuando la pendiente se hace infinita (símbolo: ∞), por ende no es función, pues ∞ no está en los reales). El recorrido siempre será 0. Estas son verticales en el eje y:



2) Función Afín

Se denomina **función afín** a la función definida por $f(x) = mx + n$, con m la **pendiente** y n el **coeficiente de posición** de la función, siendo ambos números reales y $n \neq 0$.



Existen múltiples ejemplos de relaciones afines:

- La **dilatación lineal de una barra metálica por variación de temperatura**: $L_f = L_0[1 + \alpha T]$, en este caso la variación de temperatura T denota la variable independiente, L_f la dependiente, ya que $L_f = L_f(T)$, la pendiente sería $L_0\alpha$ y el coeficiente de posición L_0.

- El **cobro de un estacionamiento con respecto al tiempo** por lo general es un modelo lineal afín ya que tienen una tarifa base b y luego cobran p por unidad de tiempo t, entonces el cobro C con respecto al tiempo t se modela $C(t) = pt + b$.

- ¿Recuerdas la fórmula de **interés simple**? Esta es de la forma: $C_F = C_I\left(1+\frac{i}{100}\cdot n\right)$, lo que es una función afín. En este caso, n denota la variable independiente, C_F la dependiente, ya que $C_F = C_F(n)$, la pendiente sería $C_I\frac{i}{100}$, lo que multiplica a n, y el coeficiente de posición C_I si reordenamos los términos.

- ¿Se te ocurre otra?

Propiedades:

- ¡Vemos ahora que la Función Afín, **a pesar de ser línea recta, no es lineal**! Ya que **NO CUMPLE** con las siguientes propiedades:

  1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$
  2. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x), \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$

  Veamos un contraejemplo (lo que basta para decir que la propiedad no se cumple siempre): Sea $f(x) = 2x+1$, entonces

  1. $f(3+4) = 2\cdot(3+4)+1 = 15$, mientras $f(3)+f(4) = (2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1) = 16$. Entonces $f(3+4) \neq f(3)+f(4)$.
  2. $f(3\cdot 4) = 2\cdot(3\cdot 4)+1 = 25$, mientras $3\cdot f(4) = 3\cdot(2\cdot 4+1) = 27$. Entonces $f(3\cdot 4) \neq 3\cdot f(4)$.

- Siempre ocurrirá que $f(0) = n$, es decir que las funciones afines siempre, en el eje vertical, pasan por el punto $(0, n)$. Dicho de otro modo, el **coeficiente de posición n indica el punto de intersección de la función con el eje Y**.

- También, las funciones afines decimos que se anulan en el punto $\left(\frac{-n}{m}, 0\right)$, cuando $m \neq 0$. Dicho de otro modo, **la función afín intersecta al eje X siempre que la pendiente sea no nula**.

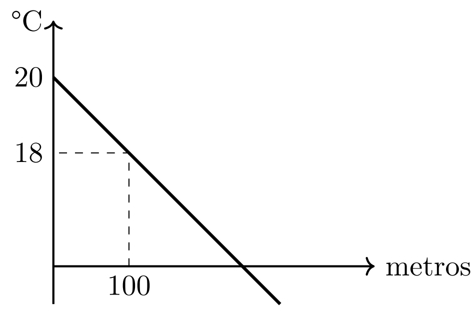
- Como verás, **en el dominio de la función se podría tener cualquier número real**, ya que no hay restricciones. Esto implica que muchas veces se escriba:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = mx+n \end{aligned}$$

  Vemos que en este último caso $Dom(f) = \mathbb{R}$ y que $CoDom(f) = Rec(f) = \mathbb{R}$ si $m \neq 0$, al igual que la función lineal.

- Notamos que si la pendiente es nula: $m = 0$, entonces $Rec(f) = n$.

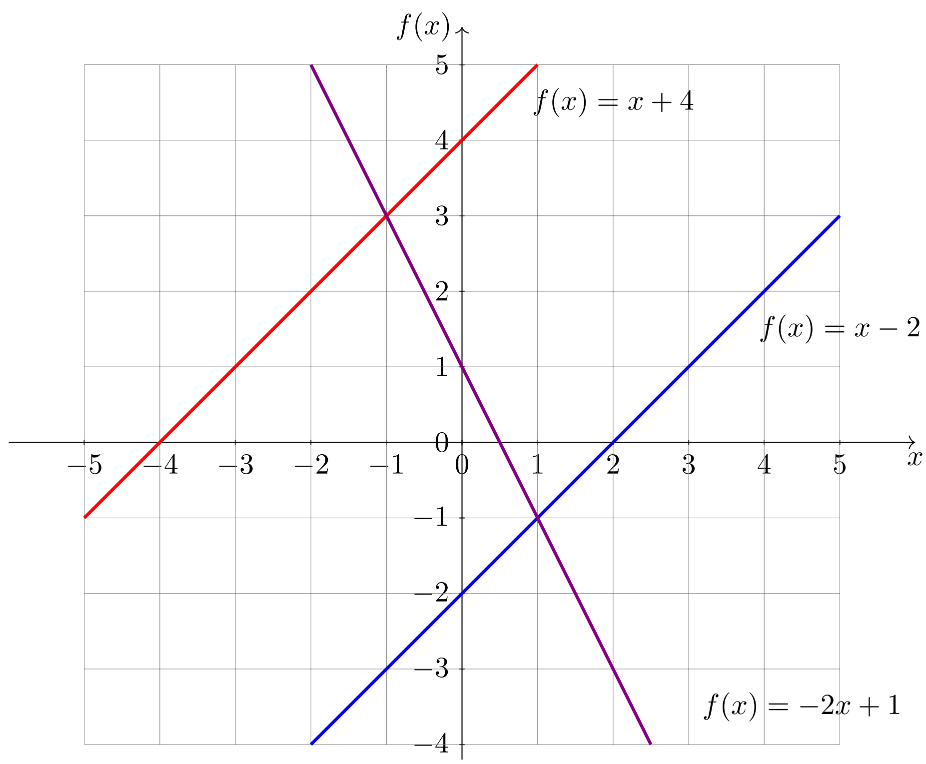
Un ejemplo de Función Afín sería el registro de temperatura, en grados Celsius, que realiza un alpinista al momento de comenzar a subir una montaña en función de la altura en metros.



Al observar el gráfico nos damos cuenta que al inicio (altura cero metros) registró una temperatura de 20 °C y luego de haber ascendido 100 metros la temperatura descendió a 18 °C. Con estos dos datos podemos obtener la función $f(x) = mx + n$ para luego responder preguntas como: ¿Qué temperatura medirá el alpinista a una altura de 250 m? o ¿A qué altura la temperatura es de 0°C?

Para obtener las constantes m y n es bueno comprender el concepto de **ecuación de la recta** que veremos más adelante.

A modo de ejemplo, en el siguiente gráfico se dibujan tres funciones lineales $f(x) = mx + n$ con distintas pendientes y valores de coeficiente de posición.



Las rectas de color rojo y azul son paralelas ya que tienen la misma pendiente ($m = 1$).

¿Cómo a partir de un gráfico logramos identificar la pendiente de un gráfico cualquiera? La verdad es que la materia que estudia eso corresponde a Geometría Analítica, de modo que resumiremos el razonamiento y en el eje de Geometría encontrarás en mayor detalle toda la información.

Relación con la Ecuación de la Recta (Geometría)

La ecuación de la recta se define como:

$$y = mx + n$$

donde m es una constante llamada **pendiente** y se asocia a la razón entre el "incremento de las ordenadas y abscisas" y n es el **coeficiente de posición** y representa la **intersección de la recta con el eje de las ordenadas**.

Dados **dos puntos en un plano cartesiano** $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ la **pendiente de la recta se puede calcular** de la siguiente forma:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

El **signo de la pendiente** indica si se trata de una recta que **asciende (positiva) o desciende (negativa)**.

Volvamos al ejemplo del alpinista. Al observar el gráfico se aprecian 2 puntos: $A = (0, 20)$ y $B = (100, 18)$. Al calcular la pendiente "m":

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 20}{100 - 0} = \frac{-2}{100} = -0,02$$

Hemos encontrado el valor de la pendiente. El coeficiente de posición "n" es 20 ya que es la intersección de la recta con el eje de las oordenadas. Entonces la función que relaciona la temperatura con la altura es de la forma:

$$f(x) = -0,02x + 20$$

o

$$T(h) = -0,02h + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y h es la altura en metros.

Una vez obtenida la ecuación lineal que modela la situación de tu problema puedes responder lo solicitado, en nuestro caso son dos preguntas: a) ¿qué temperatura medirá el alpinista a una altura de 250 m? y b) ¿a qué altura la temperatura es de 0°C?

a) Solución: Reemplazamos en nuestra fórmula el valor $h = 250\ m$

$$
\begin{aligned}
T(h) &= -0,02h + 20 \\
&= -0,02 \cdot 250 + 20 \\
&= -5 + 20 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

A 250 metros de altura la temperatura es de 15 °C.

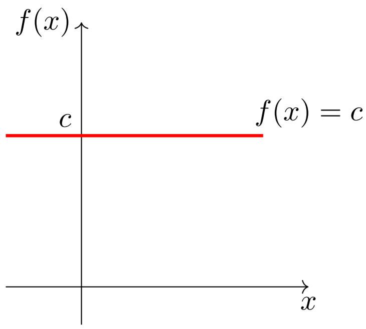
b) Solución: Reemplazamos en nuestra fórmula el valor $C = 0$ °C y despejamos h

$$
\begin{aligned}
T(h) &= -0,02h + 20 \\
0 &= -0,02h + 20 \\
0,02h &= 20 \\
h &= \frac{20}{0,02} \\
h &= 1.000
\end{aligned}
$$

A los 1.000 metros de altura la temperatura es de 0 °C. ¡Hay que llevar abrigo!

3) Función Constante

Se denomina **función constante** a la función de la forma $f(x) = c$, con c un número real.



Existen múltiples ejemplos de relaciones constantes:

- La **temperatura corporal** 36,5°C de un ser humano es constante si no estamos con fiebre o hipotermia.

- La **aceleración de gravedad terrestre** $g = 9,8\ m/s^2$ es una constante si no cambio la altura respecto al suelo.

- La **capacidad de un disco duro** (o pendrive) es constante independiente de cuantas veces lo formateo.

Propiedades:

- Claramente, la función constante no cumple con la propiedad de ser lineal. Esto se puede, por ejemplo, tomando la función $f(x) = 1$ y notando que:

  1. $f(2+3) = 1$ y $f(2) + f(3) = 2$.
  2. $f(2 \cdot 3) = 1$ y $2 \cdot f(3) = 2$

- Siempre ocurrirá que $f(x) = c$, es decir que las **funciones constantes siempre tomarán el valor de la constante** c, además de cortar al eje y en el punto $(0, c)$.

- **Nunca pasan por el eje horizontal** (a menos que sean la función $f(x) = 0$).

- Como verás, en el **dominio de la función se podría tener cualquier número real**, ya que no hay restricciones. Sim embargo, **el recorrido estará restringido a un solo punto**: c.

Aplicaciones Lineales

Los modelos lineales se pueden ocupar para **plantear y resolver problemas**, ya que en muchas ocasiones se necesitan funciones para lograr este objetivo, por ello se hace necesario transformar las ecuaciones a términos de funciones que modelen la situación. Para realizar esto se debe **identificar cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente**.

En el día a día hay muchos problemas que se tratan con funciones, y, por ende, es necesario saber expresar una situación práctica en términos de una relación funcional. La función que se obtiene produce un modelo matemático de la situación. En general, son las funciones afines las que aparecen como problemas. Uno debe identificar las variables del planteamiento con la independiente y dependiente. Ver cuál es la "base" del problema, si tiene un "costo máximo", "salario mínimo", etc.

OJO: Es bueno tener en mente que cuando una **función intersecta a uno de los ejes, implica que la otra variable vale 0**. Es decir, que cuando la función intersecta al eje Y, $x = 0$; lo mismo cuando intersecta al eje X, $y = 0$.

Ejemplos:

1. Un bebé tiene una masa de 12 kilos al cumplir dos años y a los tres años es de 14 kilos. Si la masa y la edad en años del bebé estan relacionados por un modelo lineal entre los dos y tres años, entonces ¿Cuál será el peso del niño cuando cumpla cuatro años?

Solución: El tiempo t es la variable independiente (eje horizontal) y la masa M la variable dependiente (eje vertical):

$$M = mt + n$$

donde m es la pendiente y n es el coeficiente de posición.
Los puntos que tenemos por enunciado son: $A = (2,\ 12)$ y $B = (3,\ 14)$.
Al calcular la pendiente "m":

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14 - 12}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

para calcular el coeficiente de posición "n" reeemplazamos los valores del punto A:

$$\begin{aligned} M &= mt + n \\ 12 &= 2 \cdot 2 + n \\ 12 - 4 &= n \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Entonces nuestra fórmula que relaciona ambas variables es: $M = 2t + 8$.

Al reemplazar t por 4 años: $M = 2t + 8 = 2 \cdot 4 + 8 = 8 + 8 = 16$.

Respuesta: a los 4 años tendrá una masa de 16 kilogramos.

2. La siguiente tabla muestra la cantidad de litros L que tiene un estanque transcurridos t minutos de abrir la llave de paso con un caudal constante. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) falsa(s)?

I) Al momento de abrir la llave el estanque tenía 130 litros.
II) El estanque se llena a razón de 3 litros por minuto.
III) A los 22 minutos el estanque tendrá 210 litros.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) Solo II y III

Litros (L)	**Minutos (t)**
150	5
162	8
170	10

Solución: El tiempo t en minutos es la variable independiente (eje horizontal) y los litros L la variable dependiente (eje vertical):

$$L = mt + n$$

donde m es la pendiente y n es el coeficiente de posición.
Tenemos 3 puntos por enunciado, pero necesitamos solo 2: $A = (5,\, 150)$ y $B = (8,\, 162)$.
Al calcular la pendiente "m":

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{162 - 150}{8 - 5} = \frac{12}{3} = 4$$

para calcular el coeficiente de posición "n" reeemplazamos los valores del punto A:

$$\begin{aligned} L &= mt + n \\ 150 &= 4 \cdot 5 + n \\ 150 - 20 &= n \\ n &= 130 \end{aligned}$$

Entonces nuestra fórmula que relaciona ambas variables es: $L = 4t + 130$.

Ahora verificamos si las afirmaciones son correctas:

I) Al momento de abrir la llave el estanque tenía 130 litros. Verdadera ya que cuando $t = 0$, $L = 130$ litros.

II) El estanque se llena a razón de 3 litros por minuto. Falso ya que se llena a razón de 4 $litros/min$.

III) A los 22 minutos el estanque tendrá 210 litros. Reemplazamos en nuestra fórmula:

$$\begin{aligned} L &= mt + n \\ &= 4 \cdot 22 + 130 \\ &= 88 + 130 \\ &= 218 \end{aligned}$$

A los 22 minutos el estanque tendrá 218 litros. Entonces es falsa.
La alternativa correcta es E).

Científica Destacada: Jocelyn Bell

Susan Jocelyn Bell Burnell (nacida en Belfast el 15 de julio de 1943) es una astrofísica norirlandesa que descubrió la primera radioseñal de un púlsar. La detección de estas radiofuentes ha permitido contrastar la teoría de la evolución estelar. Es una de las científicas más influyentes del Reino Unido y ha recibido numerosos galardones.

En 1965, Jocelyn Bell comenzó a trabajar en su doctorado, en la Universidad de Cambridge. Fue mientras trabajaba bajo la dirección de Antony Hewish, que Jocelyn descubrió los púlsares.

Los primeros dos años en Cambridge, Bell los dedicó a asistir la construcción de un radio telescopio de 81.5 megahertz que iba a ser utilizado para realizar un seguimiento de cuásares. El telescopio entró en operación en 1967. El trabajo de Jocelyn Bell consistía en operar el telescopio y analizar más de 120 metros de papel producidos por el telescopio cada 4 días. Luego de varias semanas de análisis, Bell notó algunas marcas inusuales en el papel. Estas marcas eran hechas por una fuente de radio demasiado rápida y regular para ser un cuásar. Aunque la señal de la fuente era sólo 2,5 centímetros de los 121,8 metros de papel, Jocelyn Bell reconoció su importancia. Había detectado la primera evidecia de un púlsar.

En febrero de 1968, la noticia del descubrimiento realizado por Jocelyn Bell fue publicado en la revista científica Nature. Estudios posteriores realizados por grupos de astrónomos alrededor del mundo identificaron la señal como provenientes de estrellas de neutrones con rápida rotación. Estos objetos, primeramente identificados por Jocelyn Bell, comenzaron a ser conocidos con el nombre de púlsares. El término púlsar es una abreviación de estrella pulsante en radio o fuente de radio con rápidas pulsaciones.