Biyectividad y Función Inversa

Eje temático: Álgebra y Funciones

Tipos de Funciones

Motivación

Como podrán recordar, de la última vez que hablamos de funciones, dijimos que estas las podemos entender como **máquinas que reciben valores y entregan resultados a partir de los datos ingresados**. Las reglas básicas que debe cumplir toda máquina son:

- Siempre que se le de un valor, esta **deberá entregar uno de vuelta**.
- Cada valor que se le entregue dará **solamente un resultado**.

La intención hoy es aprender cómo estas *máquinas* con las que trabajaremos pueden tener comportamientos especiales que las diferencian entre ellas, además de encontrar y construir **nuevas máquinas que hagan el proceso inverso**. Por ejemplo: Si una función devuelve siempre el doble del valor que se le entrega, podremos encontrar su inversa si definimos una nueva función que devuelva la mitad de los valores que se le den.

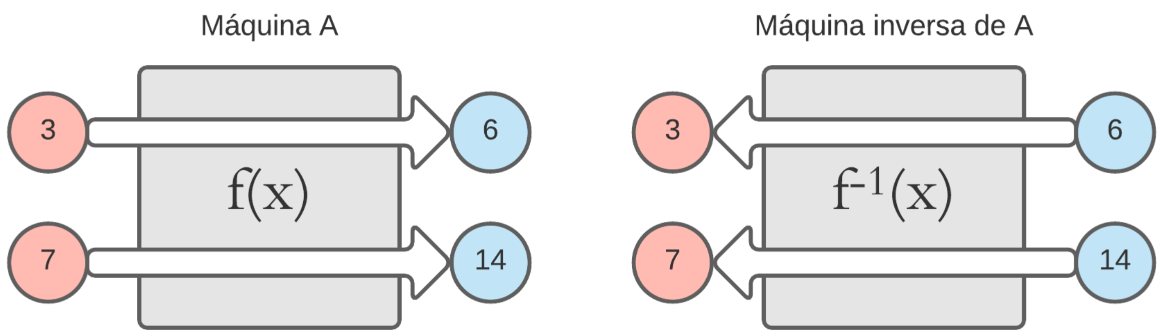


Figura 1: Ejemplo de analogía función/máquina y su inversa

Es por eso que, dependiendo de la función, estas pueden tener características notorias con respecto a su comportamiento, lo cual **se refleja en su gráfica**. Por lo mismo, es importantísimo conocer y comprender la diferencia entre **Dominio**, **Co-Dominio** y **Recorrido** de una función. Si tienes dudas de estos conceptos, te recomendamos repasar la guía de funciones.

Todo esto se engloba en el área de funciones **inyectivas, epiyectivas, biyectivas e inversas**, temas que se estudian en la enseñanza media. ¿Cómo son este tipo de problemas? En el Modelo DEMRE del año 2019, se presentó el siguiente problema de función inversa:

Sea $f :]-\infty, 3] \longrightarrow B$, definida por $f(x) = (x-3)^2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. f no es inyectiva.

II. Si B es $[0, \infty[$, entonces f es epiyectiva.

III. Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$, con x en B.

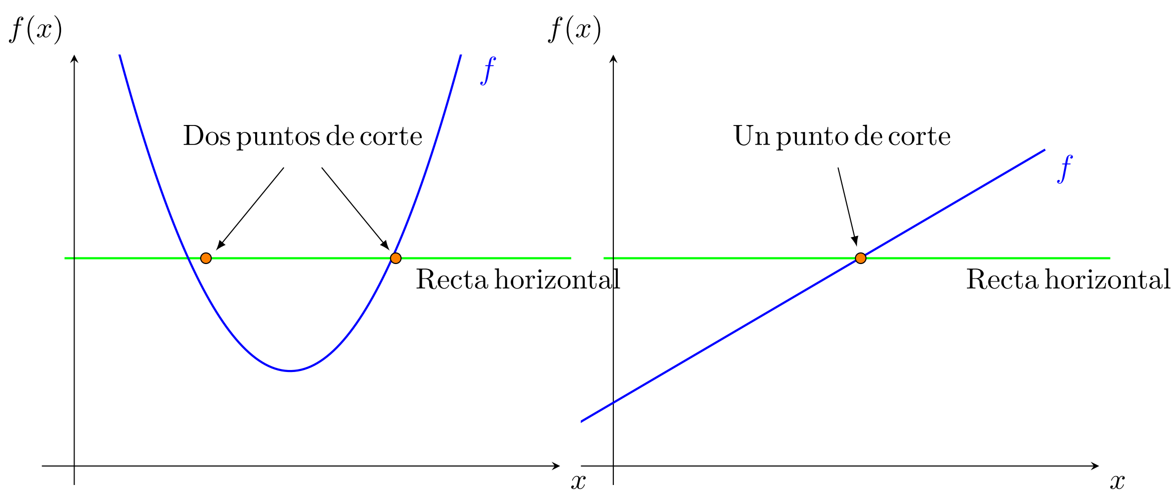
a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) I, II y III

Creemos que este problema es **bastante desafiante** ya que no es para nada sencilla la manera en la que se debe plantear. Al final de esta guía lo resolveremos utilizando las propiedades que tienen las funciones cuando son inyectivas y sobreyectivas.

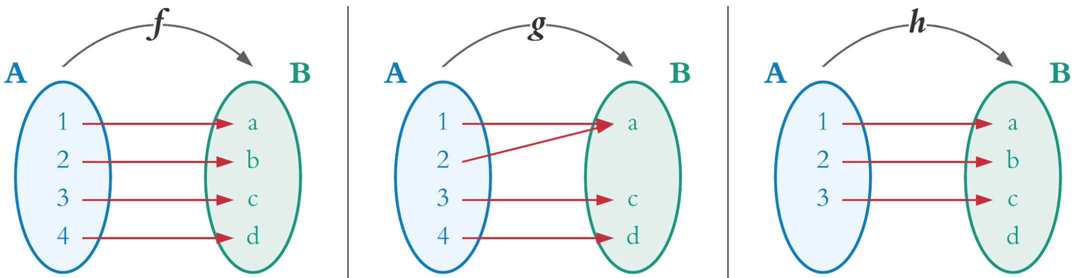
Función Inyectiva

Una **función inyectiva** corresponde a una función donde **todo elemento perteneciente al recorrido (imágenes), posee un único elemento correspondiente en el dominio (pre-imágenes)**.

Esto quiere decir que en una función inyectiva, para cada valor de y en $\text{Rec}(f)$ existe un único valor en x en $\text{Dom}(f)$ tal que $f(x) = y$. Si trazáramos un recta horizontal en cualquier parte del gráfico de la función inyectiva, esta **corta a la función en, máximo, un punto**. Gráficamente, se entiende lo siguiente:



Viendo las funciones como diagramas se entiende lo siguiente:



f sí es inyectiva | ***g*** <u>no</u> es inyectiva | ***h*** sí es inyectiva

Tres funciones f, g, y h ilustradas con sus respectivos conjuntos que las definen. Vemos que f y h son inyectivas ya que **no existe ningún valor en B tal que tenga 2 o más pre-imágenes**. Notando que, a pesar que en h haya un valor en B que no tiene pre-imagen, se sigue cumpliendo inyectividad. En el caso de g, vemos que el valor a posee como pre-imágenes los puntos 1 y 2 del Dominio, por lo tanto, no es inyectiva.

Se puede observar que a los valores del Co-Dominio (B), de una función inyectiva, no les puede llegar más de una flecha desde A.

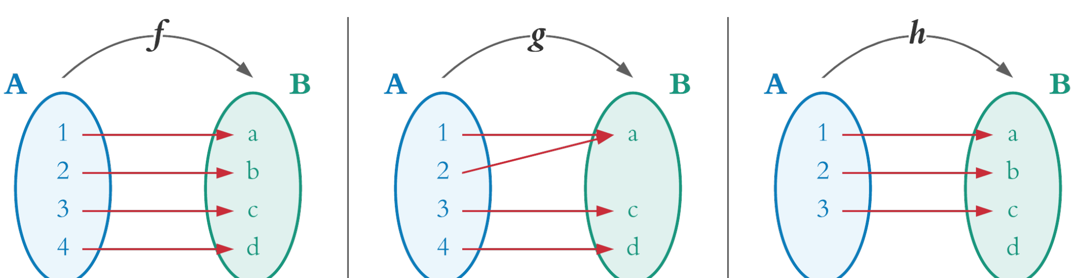
Función Sobreyectiva o Epiyectiva

Una **función sobreyectiva** (o epiyectiva) corresponde a una función donde **todo elemento perteneciente al CoDominio (o conjunto de llegada), tiene pre-imagen**. Esto quiere decir que una función sobreyectiva es la que no posee valores del conjunto de llegada fuera del recorrido de la función, o sea, **todo elemento del CoDominio es parte del Recorrido**.

Teóricamente, se entiende que el **Co-Dominio de la función es igual al Recorrido**:

$$CoDom(f) = Rec(f)$$

Viendo las funciones como diagramas, se entiende lo siguiente:



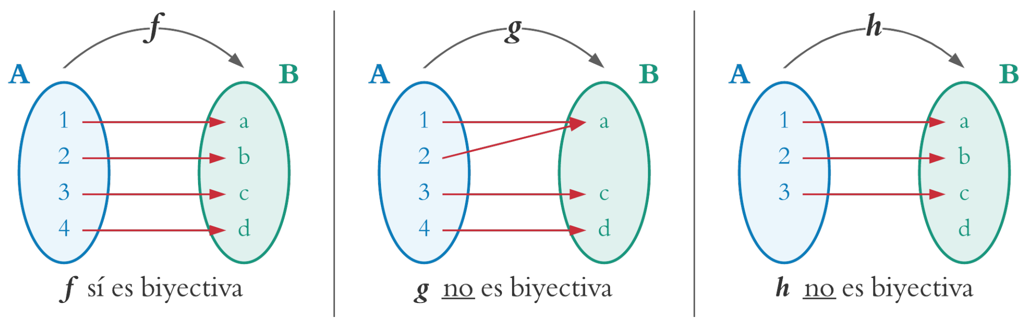
f sí es sobreyectiva | ***g*** sí es sobreyectiva | ***h*** <u>no</u> es sobreyectiva

Tres funciones f, g, y h ilustradas con sus respectivos conjuntos que las definen. Vemos que f y g son sobreyectivas **ya que no existe ningún valor en B que no tenga pre-imágenes**. En el caso de h, vemos que el valor d no posee pre-imagen, por lo que no es sobreyectiva.

Se puede observar que una función sobreyectiva no posee valores *libres* en el Co-Dominio (B), es decir, a todo elemento en B le tiene que llegar, por lo menos, una flechita. Además, se da que $Rec(f) = Rec(g) = B$.

Función Biyectiva

Una función será **biyectiva** si es **inyectiva y sobreyectiva** al mismo tiempo.

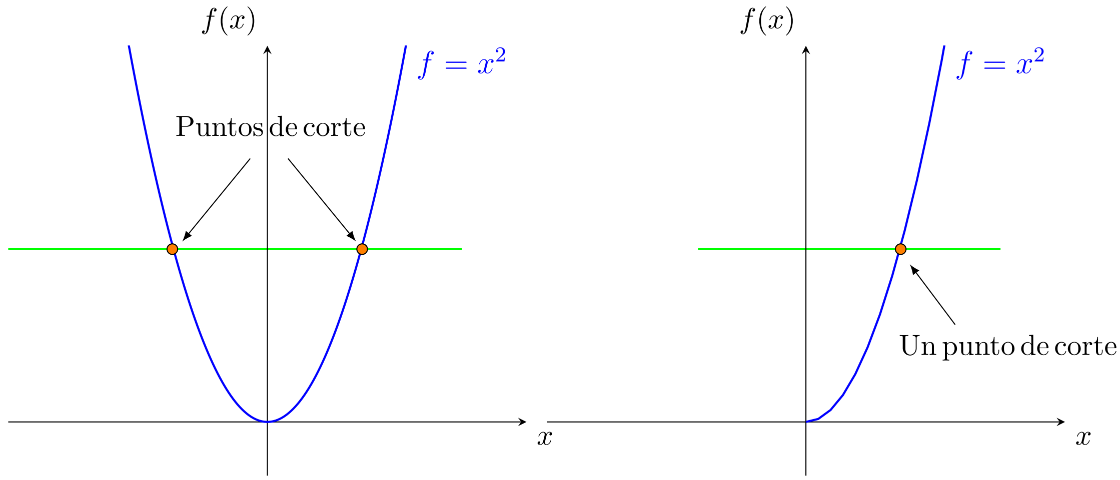


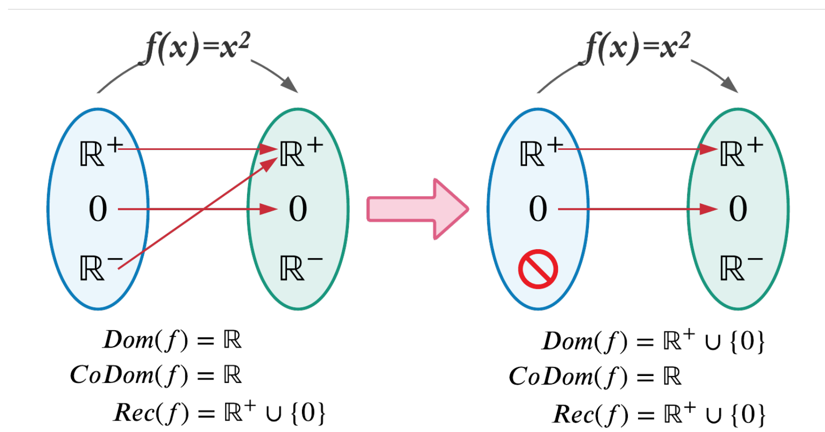
Una función **puede volverse biyectiva** si se acota su dominio y/o co-dominio. Por lo mismo, es importante analizar estos conjunto al momento de estudiar biyectividad. Veamos un ejemplo:

Sea la función:

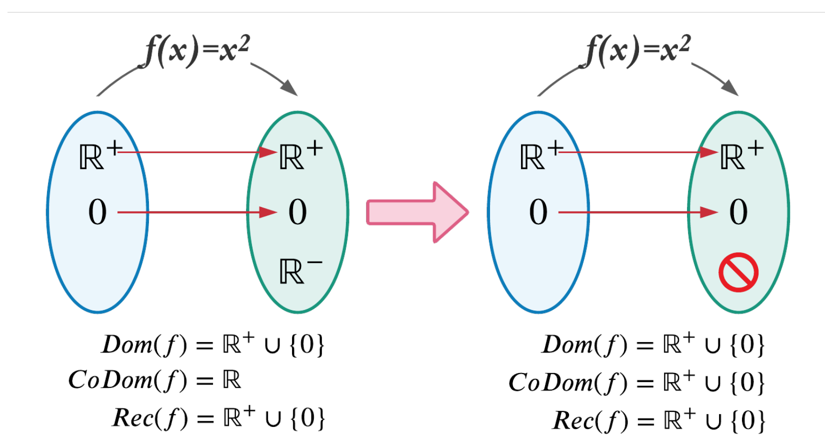
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Tal como vimos anteriormente, esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Por un lado, no es inyectiva porque el dominio considera todos los reales, y al ser la función cuadrática, los valores se positivizan y todos los elementos positivos poseen 2 pre-imágenes (por ejemplo: $f(-2) = f(2) = 4$, es decir, el 4 posee dos pre-imagenes, el 2 y el -2). Por otro lado, no es sobreyectiva porque $CoDom(f) = \mathbb{R}$, mientras que $Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sin embargo, si acotamos el dominio descartando los reales negativos, tendremos que la función si será inyectiva.

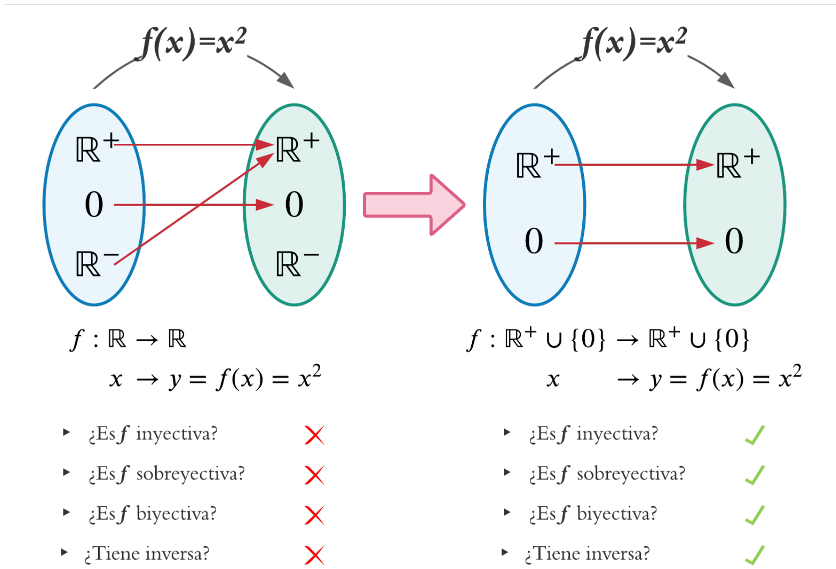




Ahora la función es inyectiva. Para que sea sobreyectiva es necesario restringir el Co-Dominio, dado que los números negativos no son parte del recorrido.



Ahora nuestra función sigue siendo la misma, pero su dominio y recorrido ha cambiado, quedando de la siguiente forma:



Por lo mismo, es importante saber cómo es el dominio y recorrido de la función al momento de estudiar la biyectividad.

Desafío: Determina si la siguientes funciones son biyectivas. De no serlo, ¿en que dominio y/o recorrido podrían ser biyectivas?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{2} \end{aligned}$$

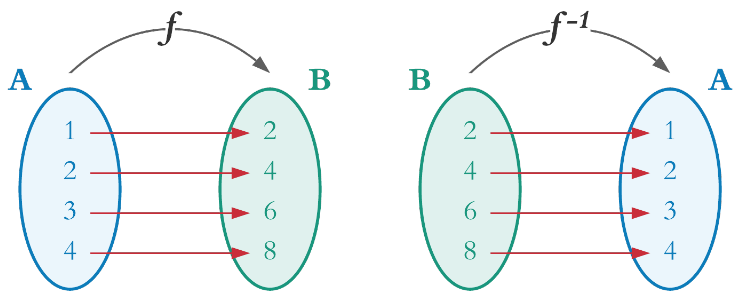
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = g(x) = 6 \cdot x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = h(x) = 8x^3 \end{aligned}$$

Función Inversa

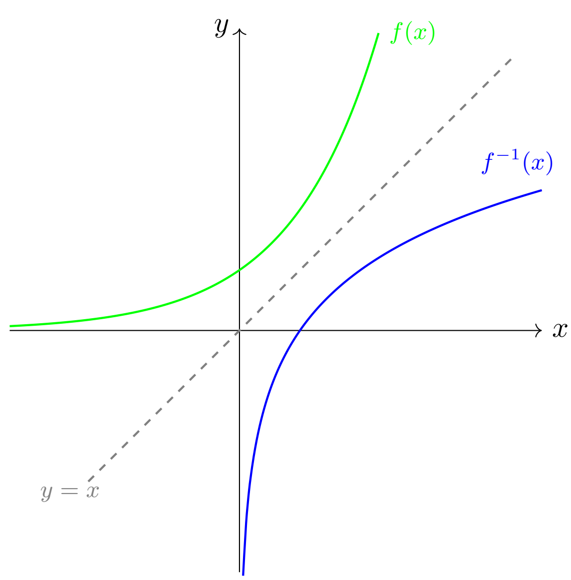
Si tenemos una función que relaciona los valores de un conjunto A con los de un conjunto B y esta función es **biyectiva**, entonces **podemos encontrar una función que realice la relación inversa**, es decir, que relacione los valores del conjunto B con los de conjunto A de la siguiente manera:

$$\text{Si } f : A \to B, \text{ entonces } f^{-1} : B \to A$$



Una manera simple de verlo, es que **la función inversa da vuelta las flechitas de la función original en el diagrama**. ¿Qué pasa si no hay inyectividad o sobreyectividad? Al dar vuelta las flechas, ¿seguirá siendo una función?

La función inversa, gráficamente, se visualiza en el plano cartesiano como el **reflejo de la función original con respecto a la identidad** (la identidad es la función lineal $y = f(x) = x$).



¿Cómo puedo obtener algebraicamente la función inversa?
Si tengo la función f tal que,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

La forma clásica de obtener la función inversa es invirtiendo las variables x, y para después despejar y. Es decir,

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ x &= 2y + 1 && \text{/ acá se invirtieron las variables} \\ x - 1 &= 2y \\ \frac{x-1}{2} &= y && \text{/ se despeja } y \end{aligned}$$

Finalmente, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

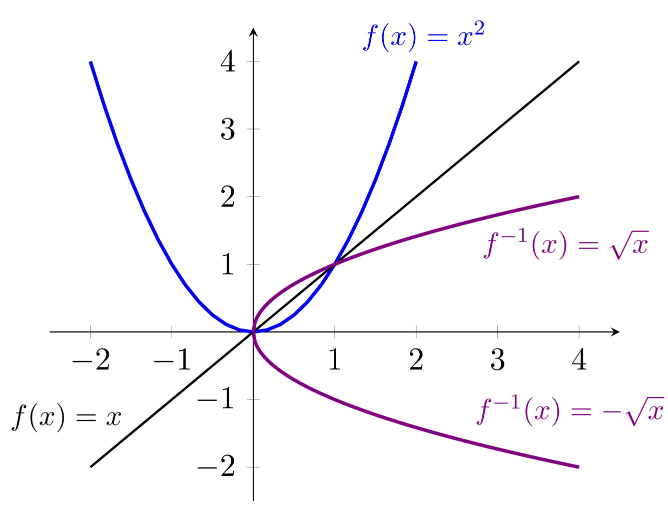
Ahora, veámoslo con el problema anterior:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Usando la forma anterior (invertir variables y despejar y), se obtiene:

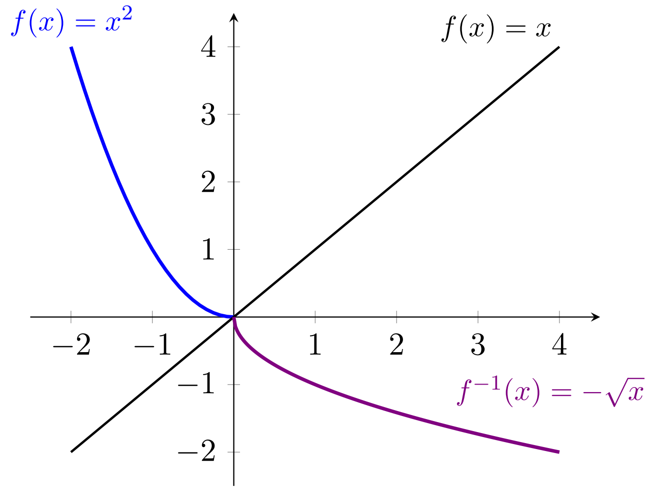
$$y = x^2 \longrightarrow x = y^2 \longrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

Vemos entonces que la función inversa debería a ser $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$, pero ¡eso no es función!



Una forma de solucionarlo es seleccionando una de las ramas de la parábola original, lo que es equivalente a acotar el dominio y el co-dominio, ¡similar a lo que hicimos cuando introdujimos la función biyectiva en las páginas anteriores!

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^- \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$



Esta función es biyectiva en este dominio y recorrido, por lo tanto, podríamos obtener su función inversa, la cual será la raíz cuadrada negativa. Si nos fijamos, tanto el dominio como el recorrido de la función corresponden a los reales negativos junto con el 0, por lo tanto, la función inversa será:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^- \cup \{0\} \\ x &\longmapsto y = f(x) = -\sqrt{x} \end{aligned}$$

Resolución del problema inicial

Ahora tenemos los conocimientos para resolver el problema propuesto por el DEMRE!. ¿Crees poder resolverlo solo?

Sea $f :]-\infty, 3] \longrightarrow B$, definida por $f(x) = (x-3)^2$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. f no es inyectiva.

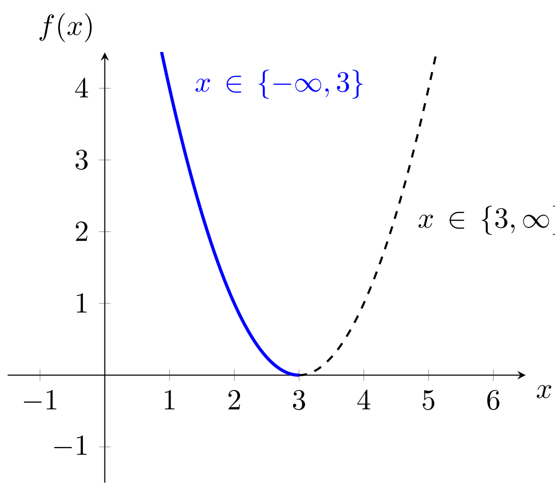
II. Si B es $[0, \infty[$, entonces f es epiyectiva.

III. Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$, con x en B.

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo II y III
e) I, II y III

Respuesta:

Lo primero en este problema es identificar el dominio de la función: $Dom(f) =]-\infty, 3]$, es decir, cuando graficamos $f(x) = (x-3)^2$ solo debemos considerar los valores menores o iguales a 3:



El dibujo anterior es sólo válido si el Recorrido de la función son los reales positivos, aunque en realidad desconocemos el Co-Dominio ya que B no está definido. Veamos el valor de verdad de cada afirmación:

I. f no es inyectiva.

La definición de inyectividad solicita que la función, para cada valor de y solo exista un único valor en x en el dominio de la función. Vemos que lo anterior se cumple, ya que, independiente de el conjunto B, la función sólo será el brazo izquierdo de la parábola, por lo que las posibles rectas horizontales que uno puede trazar solo intersectarán la función en 1 punto. Por lo tanto, I **es Falsa.**

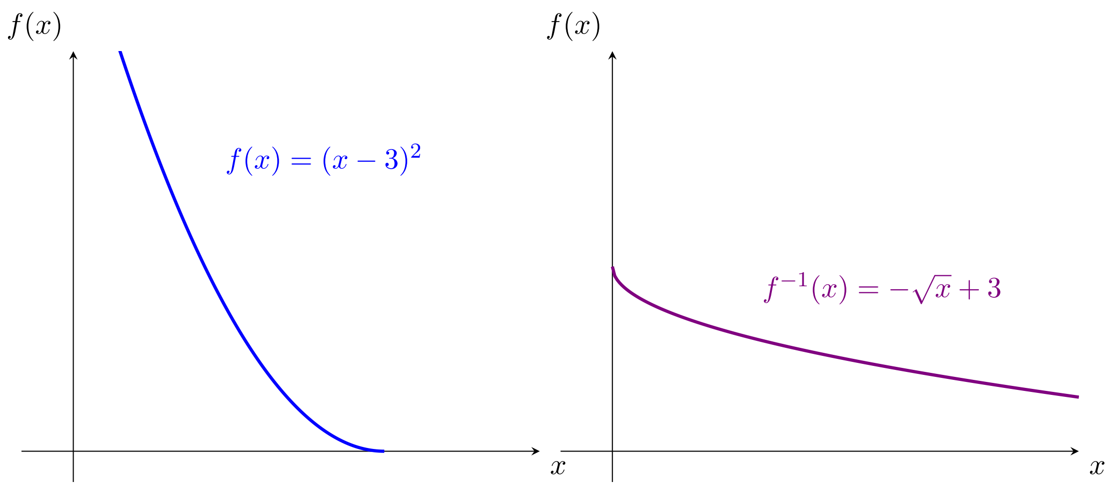
II. Si B es $[0, \infty[$, entonces f es epiyectiva.

La definición de epiyectividad solicita que $Co - Dom(f) = Rec(f)$. En este caso vemos que si $Co - Dom(f) = [0, \infty[$, entonces la función toma esos valores también, ya que $(x-3)^2 \geq 0$ para todo $x \in]-\infty, 3]$. Por ende, II **es Verdadera.**

III. Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$, con x en B.

Si f es biyectiva, entonces es inyectiva y epiyectiva. Esto implica que podemos calcular la inversa de la siguiente manera: $f^{-1}(x) = x = (y-3)^2$

$$\begin{aligned}
(y-3)^2 &= x \\
y - 3 &= \pm\sqrt{x} \quad \text{Restricción en el dominio} \\
y - 3 &= -\sqrt{x} \\
y &= -\sqrt{x} + 3
\end{aligned}$$



Vemos que la función debe ser la que posee el signo negativo ya que corresponde al brazo de la parábola que es parte de la función. En el caso contrario, donde el brazo derecho de la función es considerado la inversa es $y = -\sqrt{x} + 3$. Por ende, III es verdadera.

Luego la respuesta correcta es la opción d).

Figura 2: Sophie Germain

Científica Destacada: Sophie Germain

Nació en París el 1 de Abril de 1776. Sophie era una muchacha tímida y no entendía el interés de su familia por la política. Por eso se refugiaba en la biblioteca y allí a los 13 años leyó, la historia de la muerte de Arquímedes y se empeñó en conocer el fascinante problema que había provocado tanto ensimismamiento.

Fascinada por los inventos del ilustre físico, comenzó a leer cuantos libros de matemáticas pudo agenciarse. Así descubrió las matemáticas y empezó a estudiar por su cuenta, a pesar de los impedimentos que le ponían sus padres puesto que eso no era para una mujer. Se levantaba por las noches para evitar ser descubierta por su padre y leía los libros a la luz de una vela, para evitar ser descubierta por sus padres que opinaban que las matemáticas no eran cosas de mujeres.

A los dieciocho años quiso entrar en l' Ecole Polytechnique, pero no admitían mujeres; unos amigos le pasaban los apuntes de las conferencias, en particular las de Lagrange, que enseñaba análisis. Al final del semestre Sophie presentó una memoria con el nombre de M. Leblanc; Lagrange quedó impresionado por la originalidad del trabajo y quiso conocer al autor para felicitarlo personalmente; quedó asombrado cuando vio que Monsieur Leblanc era una jovencita. Lagrange reaccionó bien, la alentó y le presentó a otros matemáticos con los que mantuvo una abundante correspondencia matemática.

En 1816, siendo ya muy apreciada en los círculos matemáticos, alcanzó la celebridad al obtener el premio propuesto por la Academia de las Ciencias sobre la teoría de las superficies elásticas, cuestión sometida ya tres veces a concurso y quedando, hasta entonces, desierto.

Sophie Germain hizo descubrimientos importantes en teoría de números, en física matemática, acústica y elasticidad. En 1831, iba a recibir el título de Doctor Honoris Causa de la Universidad de Gottingen, pero murió un mes antes de la fecha fijada.

Murió el 26 de Junio de 1831, tras dos años de sufrimiento, debido a un cáncer de mama.